த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—290

# பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்

## (முதல் தொகுதி)

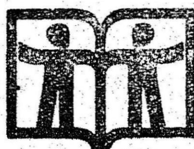
(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத் திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்கள் :

ப. அல்போன்சு இராசேந்திரன், எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதத்துறைத் தலைவர்,
ஆதித்தனார் கல்லூரி, திருச்செந்தூர்.

வெ. சுவாமிநாதன், எம்.எஸ்ஸி.,
சு. இராமச்சந்திரன், எம்.எஸ்ஸி.,
கணித விரிவுரையாளர்கள்,
ஆதித்தனார் கல்லூரி, திருச்செந்தூர்.





தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1972

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 290



UNIVERSITY MODERN ALGEBRA (Vol. I)

P. ALPHONSE RAJENDRAN,
V. SWAMINATHAN AND
S. RAMACHANDRAN

Price Rs. 6-90

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
ANURADHA ACCHAGAM,
146, T. H. Road, Madras-21.

# அணிந்துரை

## திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி-உள்ளாட்சித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பன்னிரண்டாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன் வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்றுவருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லவேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்' (முதற் தொகுதி) என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 290ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 325 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

**இரா. நெடுஞ்செழியன்**

# பொருளடக்கம்

பக்கம்



## பகுதி IV



## பகுதி V



## பகுதி VI

# பல்கலைக்கழக நவ இயற்கணிதம்

(முதல் தொகுதி)

# 1. கணங்கள், தொடர்புகள், சார்புகள்

## (Sets, Relations and Functions)

அறிமுகம் (Introduction)

சதுரம், சாய்சதுரம், செவ்வகம், இணைகரம், டிரபீசியம் ஆகிய யாவையும் நாற்கரங்களே. எனவே பொதுவான ஒரு நாற்கரத்தைப் பற்றிப் படிப்பதென்பது சதுரம், சாய்சதுரம், செவ்வகம் முதலியவற்றிற்கும் பொருந்தும். இந்தப் பொதுப்படையான படிப்பில் சதுரத்திற்குள்ள குணங்களைச் சேர்த்துக்கொள்ளும்போது இந்தப் படிப்பு சதுரத்தைப் பற்றிய படிப்பாகிறது. இதேபோல் சாய் சதுரத்தைப் பற்றிய படிப்பையும் நாம் பொதுவான நாற்கரத்தைப் பற்றிய படிப்பிலிருந்து பெறலாம். இவ்வகையாக பொதுவான படிப்புகள் ஒவ்வொரு கணித அமைப்பிற்கும் (Mathematical system) உண்டு. இவ்வாறாக, கணித அமைப்புகளைப் பற்றிப் படிப்பதே இக்காலக் கணிதம் (Modern Methematics) ஆகும். இத்தகைய கணித அமைப்புகளுக்கெல்லாம் பிறப்பிடமாக விளங்குவது கணம் (Set) என்பதாகும். இந்தக் கணம் பற்றிய கோட்பாடுகளை உருவாக்கியவர் கேன்டர் (Cantor) என்பவராவார்.

### 1. கணத்தின் வரையறையும் குறிப்பிடும் விதமும்

### (Definition and specification of Set)

கணம் என்பதை நாம் திட்டமாக வரையறை செய்ய முடியாவிட்டாலும், அதைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம்.

தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட பொருள்களின் கூட்டம் கணம் (Set) எனப்படும். இக்கூட்டத்தில் உள்ள பொருள்கள் ஒவ்வொன்றும் கணத்தின் மூலகம் (element) எனப்படும்.

1·1. எடுத்துக்காட்டு : 4, 5, 6 என்னும் முழு எண்களின் கூட்டம் ஒரு கணத்தை நிர்ணயிக்கிறது என்றால் 4 என்னும் எண் அக்கணத்தின் ஒரு மூலகம் ஆகும். இதுபோல் 5 என்ற எண்ணும், 6 என்ற எண்ணும் அக்கணத்தின் மூலகங்களாகும்.

கணங்களை A, B,...X,Y... என்ற குறியீடுகளாலும் (Symbols), மூலகங்களை a, b, c, d,... x, y... என்ற குறியீடுகளாலும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இதன்படி $x$ என்ற பொருள் B என்னும் கணத்தை நிர்மாணிக்கும் கூட்டத்தில் இருந்தால் நாம் $x$ ஐ மூலக மாகக் கொண்டுள்ள கணம் B (x is an element of B) என்று கூறு கிறோம். இதையே

$x \in B$ ($x$,B கணத்தின் உறுப்பாகும்) என்று குறியீட்டு வடிவில் எழுதுகின்றோம். இதுபோல் $a$ என்பது B இன் மூலகம் அல்ல (a is not an element of B) என்பதை $a \notin B$ (a does not belong to B) என்று குறிப்பிடலாம்.

கணத்தின் மூலகங்கள் எண்களாக இருக்கவேண்டியதில்லை; எதுவாகவும் இருக்கலாம். இதன்படி பின்வருவன ஒவ்வொன்றும் கணங்களாகும்.

1. கல்லூரி நூல் நிலையத்திலுள்ள புத்தகங்களின் கூட்டம்.
2. கல்லூரியிலுள்ள ஆசிரியர் கூட்டம்.
3. நமது மாவட்டத் தொழிலாளர்கள் நடத்திய வேலை நிறுத் தங்களின் கூட்டம்.

மேலே கொடுத்துள்ள முதல் எடுத்துக்காட்டில் புத்தகங்கள் மூலகங்களாகவும், இரண்டாவதில் ஆசிரியர்கள் மூலகங்களாகவும் மூன்றாவதில் வேலை நிறுத்தங்கள் மூலகங்களாகவும் இருப்பது கவனிக்கத் தக்கது.

1·2. வரையறை: மேலே குறிப்பிட்ட மூன்றாவது கூட்டத்தில் நமது மாவட்டத் தொழிலாளர்கள் வேலை நிறுத்தங்களை நடத்த வில்லை என்று வைத்துக்கொள்வோம். அப்படியானால் மூன்றாவ தாகக் கிடைத்த கணத்தில் மூலகங்களே இல்லை. இத்தகைய, மூலகங்கள் இல்லாத கணத்தை வெற்றுக் கணம் அல்லது உள்ளீடற்ற கணம் (empty set) என்று கூறுகின்றோம். வெற்றுக் கணத்தை "$\phi$" என்னும் குறியீட்டால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

ஒரு கணத்தைக் குறிப்பிட்டுக் காட்டுவதற்கு இரண்டு வழிகள் உள்ளன. A என்னும் கணத்தில் உள்ள எல்லா மூலகங்களையும் நாம் எழுதமுடியுமாயின் அம் மூலகங்களை இருதலை அடைப்புக் குள் எழுதி, A என்னும் கணத்தைக் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறு $a, e, i, o, u$ ஆகிய எழுத்துக்களின் கூட்டம் A என்ற கணத்தைத் நிர்மாணிக்குமாயின்,

$$A = \{ a, e, i, o, u \}$$

என்று குறிப்பிடலாம்.

கணத்தைக் குறிப்பிடுங்கால் மூலகங்கள் எழுதப்பட்டிருக்கும் வரிசை முக்கியமானதல்ல. இதன்படி $\{a, e, i, o, u\}$ என்பதும், $\{e, u, i, a, o\}$ என்பதும் ஒரே கணத்தையே குறிப்பிடும். மேலும் இம்முறைப்படி கணத்தைக் குறிப்பிடும்பொழுது ஒருமுறை குறிப்பிட்ட மூலகத்தை மறுபடியும் குறிப்பிடுவதில்லை. இவ்வாருக $\{a, b, c, d, e, e\}$ என்னும் கணமும் $\{a, b, c, d, e\}$ என்னும் கணமும் ஒன்ருகும். அதாவது $\{x, y, x, z, z\}$ என்னும் கணத்தையும் $\{x, y, z\}$ என்றே எழுதுகிருேம். இரண்டு கணங்கள் ஒன்ருயிருப்பதற்கான நிபந்தனைகளைப் பின்னர் படிக்குங்கால் இவை இன்னும் தெளிவாகும்.

எல்லா மூலகங்களையும் எழுத முடியாதிருக்கும்போது மேற் குறிப்பிட்ட முறையை உபயோகிப்பது கடினமாகின்றது. இப் போது பொருட்கள் எந்த அடிப்படையில் கணத்தின் மூலகங்கள் ஆகின்றன என்பதை வைத்து நாம் கணத்தைக் குறிப்பிட முடியும். எடுத்துக்காட்டாக, G என்ற கணத்தை "இந்தியா விலுள்ள பட்டதாரிகளின் கூட்டம்" நிர்ணயிப்பதாக வைத்துக் கொள்வோம். இப்போது G என்ற கணம், $x$ என்ற இந்தியனை மூலகமாகக் கொண்டிருக்கவேண்டும் என்ருல் $x$ பட்டதாரியாக இருக்கவேண்டும். இதை

G = $\{x \mid x$ ஒரு பட்டதாரி இந்தியன்$\}$

அல்லது G = $\{x : x$ ஒரு பட்டதாரி இந்தியன்$\}$

என்று குறிப்பிடலாம். "$x$, பட்டதாரி இந்தியனுக இருந்தால் G-ல் இருப்பான்; G-ன் மூலகம் ஒவ்வொன்றும் பட்டதாரி இந்தியன்" என்பதே இதன் பொருள். [/, : ஆகிய குறியீடுகள் 'such that' என்னும் பொருளில் வருகின்றன. such that என்றே படிக்கப்படுகின்றன.]

இந்த அடிப்படையில், முந்தைய எடுத்துக்காட்டில் உள்ள இரண்டாவது கணத்தை $\{x/x$ கல்லூரியில் உள்ள ஓர் ஆசிரியர்$\}$ என்றும், மூன்ருவது கணத்தை $\{x/x$ நமது மாவட்டத் தொழிலாளர் நடத்திய வேலை நிறுத்தம்$\}$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

குறிப்பு: மேற்கூறிய குறியீட்டு முறையில் $x$ என்பது எந்த ஒரு தனிப்பட்ட பொருளையும் குறிப்பதல்ல. $x^2 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் (மூலங்கள், roots) $+1, -1$. இவைகள் இரண்டும் $x^2 - 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குப் பொருந்துவனவாக உள்ளன. அதுபோல் கணத்தில் உள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் $x$க்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விதிக்கு உட்பட்டிருக்கவேண்டும்.

**1·3. எடுத்துக்காட்டு :** இம்முறைப்படி $\{x/x^2-1=0\}$ என்பது $\{1,-1\}$ என்னும் கணத்தைக் குறிக்கின்றது. ஏனெனில் $1,-1$ ஆகிய இரண்டு எண்கள் மட்டுமே $x^2-1=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு உட்பட்டுள்ளன.

**1·4 எ.கா. :** $\{x/x$ ஓர் இரட்டை முழு எண்$\}$ என்பது $\{...-4, -2, 0, 2, 4...\}$ என்னும் கணத்தைக் குறிக்கும்.

**1·5. எ.கா. :** வெற்றுக்கணத்தை $\{x/x\neq x\}$ என்று குறிப்பிடலாம். தனக்குத்தானே சமமில்லாத எந்தப் பொருளும் இல்லாததால் இக் கணத்திற்கு மூலகங்களே இல்லை. எனவே,

$\phi = \{x/x\neq x\}$ எனலாம்.

**சில முக்கியமான கணங்கள்**

சாதாரணமாகக் கணிதத்தில் நாம் அடிக்கடி பயன்படுத்தும் சில முக்கியமான கணங்களைப் பின்வரும் குறியீடுகளால் குறிப்பது வழக்கம்.

(i) $N = \{1, 2, 3...\}$
அதாவது N என்பது இயற்கை எண்களால் (Natural numbers) ஆன கணம் ஆகும்.

(ii) $Z = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2,...\}$
அதாவது Z என்பது முழு எண்களால் (Integers) ஆன கணம் ஆகும்.

(iii) $Q = \left\{ \frac{z}{y} \Big/ \begin{matrix} x, y \in z \\ \& \ y\neq o \end{matrix} \right\}$

அதாவது Q என்பது விகிதமுறு எண்களால் (Rational numbers) ஆன கணம் ஆகும்.

(iv) $R = \{x/x$ ஒரு மெய் எண்$\}$
அதாவது R என்பது மெய் எண்களால் (Real numbers) ஆன கணம் ஆகும். மெய் எண் என்பது விகிதமுறு எண்களும் விகிதமுரு எண்களும் (Irrational numbers) சேர்ந்த கலவை ஆகும். $\left[ \frac{2}{5}, 7, \sqrt{2}, 7+\sqrt{3} \right.$ முதலியவை மெய் எண்களாகும்.$\left.\right]$

## பயிற்சி 1

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 10\}$ என்க.

$B = \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \text{ ஓர் இரட்டை எண்} \end{array} \right\}$

என்றால் B என்னும் கணத்திலுள்ள மூலகங்களை எழுதுக.

2. $A = \{1, 2, 3, \ldots\ldots 25\}$ என்க.

$B = \left\{ x \middle/ \begin{array}{l} x \in A \\ x \text{ ஒரு முழு வர்க்கம் (perfect square)} \end{array} \right\}$

என்றால் B என்னும் கணத்திலுள்ள மூலகங்களை எழுதுக.

3. $\{A = 1, 3, 5, 9, 11\}$

$B = \left\{ x \middle/ \begin{array}{l} x \in A \\ x \text{ ஓர் இரட்டை எண்} \end{array} \right\}$

என்னும் கணத்தைக் காண்க.

# 2. உட்கணமும் உள்ளடக்கு கணமும்
## (Subset and Superset)

**2·1** வரையறை : $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, c, d,\}$ என்ற இரண்டு கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம். இவைகளில் Bஇன் ஒவ்வொரு மூலகமும் Aஇன் மூலகமாக உள்ளது. இவ்வாறிருந்தால், B, A-ன் உட்கணம் (B is a subset of A) என்று கூறுகிறோம். இதையே $B \subseteq A$(B is contained in A)என்று குறியீடு மூலம் விளக்குகின்றோம்.

'B, A-ன் உட்கணம்' என்று கூறுவதையே வேறு விதமாக "A, B ஐ உள்ளடக்கு கணம்" (A is a superset of B) என்று கூறலாம். இதையே $A \supseteq B$ (A contains B) என்று எழுதலாம்.

P என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. P இன் ஒவ்வொரு மூலகமும் P-இல் உள்ளது. எனவே, வரையறைப்படி P-ன் உட்கணம் ஆகும். அதாவது $P \subseteq P$ மேலும் $P \supseteq P$ சுருங்கக் கூறின், ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே உட்கணமாகவும் உள்ளடக்கு கணமாகவும் இருக்கும்.

வெற்றுக்கணத்தில் மூலகங்களே இல்லை. எனவே, வெற்றுக் கணம் வேறு எந்தக் கணத்திற்கும் உட்கணம் ஆகும்.

$C = \{a, b, c\}$, $D = \{a, c, e, d\}$ என்ற இரு கணங்களையும் எடுத்துக் கொள்க.

b என்பது C-ன் மூலகம்; இது D-ல் இல்லை.

எனவே C என்பது D-ன் உட்கணம் அல்ல. இதை $C \not\subseteq$ என்று எழுதலாம். இதுபோலவே,

e என்பது D-ன் மூலகம்; இது C-ல் இல்லை.

எனவே D என்பது C-ன் உட்கணம் அல்ல. இதை $D \not\subseteq C$ என்று குறிப்பிடலாம்.

இங்கு நாம் எடுத்துக்கொண்ட கணங்கள் C-ம் D-ம், உட்கணம், உள்ளடக்கு கணம் என்று வேறுபடுத்தமுடியாதபடி

உள்ளன. இத்தகைய கணங்களை ஒப்பிட முடியாதவை (not comparable) என்று கூறலாம்.

A, B என்பன தனித்தனியாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு கணங்கள் என்று எடுத்துக்கொள்வோம். B என்பது A-ன் உட்கணமாகவும், A என்பது B இன் உட்கணமாகவும் இருந்தால், A ஐ நிர்ணயிக்கும் அதே மூலகங்கள் B ஐ நிர்ணயிக்கின்றன என்பது விளங்கும். எனவே A, B ஆகிய இரண்டு கணங்களுக்கும் எவ்வித வேற்றுமையும் இல்லை. இதையே $A=B$ என்று குறிப்பிடுகின்றோம். அதாவது $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ என்ற இரண்டும் உண்மையானால் $A=B$ ஆகும்.

P, Q ஆகிய இரு கணங்களில் $P \subseteq Q$ ஆகவும், $P \neq Q$ ஆகவும் இருப்பின், P என்பது Q-ன் முறையான உட்கணம் (Proper subset) என்று கூறலாம். இதை $P \subset Q$ என்றோ அல்லது $Q \supset P$ என்றோ குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

$\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ என்னும் குறியீடுகள்

A என்னும் கருத்து (கூற்று, statement) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் விதிகள், வரையறைகள், குணங்கள் ஆகியவற்றை உபயோகிக்கும் போது B என்னும் கருத்தைக் கொடுக்குமாயின், Aஆல் கொடுக்கப் படுவது B (A implies B) என்று கூறலாம். இதையே $A \Longrightarrow B$ என்று குறிப்பிடலாம். உதாரணமாக,

PQRS ஒரு சதுரம் $\Longrightarrow$ PQRS ஒரு செவ்வகம்.

$$x=y \Longrightarrow x^2=y^2$$

இது போலவே A என்னும் கருத்து B என்னும் கருத்தைக் கொடுக்கவில்லை என்றால் $A \not\Longrightarrow B$ என்றுஎழுதலாம். உதாரணமாக,

PQRS ஒரு செவ்வகம் $\not\Longrightarrow$ PQRS ஒரு சதுரம்.

மேலும் A என்னும் கருத்து B என்னும் கருத்தையும், B என்னும் கருத்து A என்னும் கருத்தையும் கொடுக்குமாயின் $A \Longleftrightarrow B$ என்று எழுதலாம். உதாரணமாக, "PQRS என்னும் சதுரத்தின் பரப்பளவு 16 சதுரமீட்டர்" $\Longleftrightarrow$ "PQRS என்னும் சதுரத்தின் பக்க நீளம் 4 மீட்டர்". $\Longleftrightarrow$ என்பது "if and only if" என்று படிக்கப்படும்.

**2·2. தேற்றம்:** A, B, C என்ற மூன்று கணங்களிலும் $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ என்றால் $A \subseteq C$ ஆக இருக்கும்.

அதாவது $A \subseteq B$ & $B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

**நிரூபணம்:** $x$ என்பது A-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$A \subseteq B$ என்பதால் $x \in B$.
இப்போது $B \subseteq C$ என்பதால் $x \in C$.
அதாவது $X \in A \Longrightarrow X \in C$.
அதாவது A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் C-ல் உள்ளது.
எனவே, $A \subseteq C$.
இவ்வாறு $A \subseteq B$ & $B \subseteq C \Longrightarrow A = C$. (தேற்றம் முடிவு).

**குறிப்பு :**

$\{0\}$ என்ற கணம் வெற்றுக்கணம் அல்ல. வெற்றுக்கணத்தில் மூலகங்களே கிடையாது. ஆனால், $\{0\}$ என்ற கணத்தில் '0' (பூச்சியம்) என்ற மூலகம் உள்ளது. உண்மையில் இவ்வாறு ஒரே ஒரு மூலகத்தை மட்டும் கொண்டுள்ள கணத்தை ஓருறுப்புக் கணம் (Singleton set) என்பது வழக்கம். $\{\phi\}$ என்பதும் ஓருறுப்புக் கணம் ஆகும்.

**அடுக்குக் கணம் (Power set)**

X என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. X-ன் உட்கணங்கள் அனைத்தும் சேர்ந்து ஒரு கணத்தை நிர்ணயிக்கின்றன. இக் கணத்தை X-ன் அடுக்குக் கணம் (power set) என்போம். இதை $P(x)$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்வாறு $P(x)$-ன் மூலகங்கள் X-ன் உட்கணங்களாகும்.

$P(x) = \{A / A \subseteq X\}$ எனலாம்.

**2·3. (i) எ.கா. :** $X = \{a, b, c\}$ என்க.
$P(X) = \{\phi, X, (a), (b), (c), (a, b)\ (b, c)\ (c, a)\}$

**2·3 (ii) எ·கா. :** $X = \phi$
$P(X) = \{\phi\}$

இங்கு $\{\phi\} \neq \phi$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ஏனெனில் $\{\phi\}$ என்ற கணத்தில் $\phi$ என்ற ஒரு மூலகம் உள்ளது. இதிலிருந்து $P(x)$ என்பது எப்போதுமே மூலகத்தையுடைய (non-empty) கணம் என்பது விளங்கும்.

**2·4. தேற்றம் :** X என்னும் கணத்தில் $n$ மூலகங்கள் இருந்தால் $P(X)$-ல் $2^n$ மூலகங்கள் இருக்கும்.

**நிரூபணம் :** X-ல் $n$ மூலகங்கள் உள்ளதால் $P(X)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு கணத்திலும் $n$ அல்லது அதற்குக் குறைவான மூலகங்களே இருக்கும்.

P(X)-ல் உள்ள கணங்களில்,

மூலகங்களே இல்லாத கணம் ($\phi$) 1

ஒரே ஒரு மூலகத்தையுடைய கணங்கள்

$(\{x\}/x \in X)$ $nC_1$

இரண்டு மூலகங்களைக் கொண்ட கணங்கள்

$(\{x, y\}/x, y \in x)$ $nC_2$

$n$-1 மூலகங்களைக் கொண்ட கணங்கள் $nC_{n-1}$

$n$ மூலகங்களைக் கொண்ட கணங்கள் (X) 1

எனவே, P(X)-ல் உள்ள மொத்தக் கணங்களின் எண்ணம்,

$1 + nC_1 + nC_2 + \dots\dots\dots + nC_{n-1} + 1$

$= (1+1)^n = 2^n$

அதாவது P(X)-ல் $2^n$ மூலகங்கள் உள்ளன.

## பயிற்சி 2

1. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ என்றால் பின்வருவனவற்றில் எவை எவை சரியானவை என்று கூறுக.

(i) $A \subseteq B$

(ii) $B \subseteq A$

(iii) $A = B$

(iv) A, B என்பவை ஒப்பிடமுடியாதவை.

(v) $A \subset B$.

2. $A = \{c, b, d, e\}$, $B = \{e, d, c, b\}$ என்றால் பின்வருவனவற்றில் எவை எவை சரியானவை என்று கூறுக.

(i) $A \subseteq B$

(ii) $B \subseteq A$

(iii) $A = B$

(iv) $A \subset B$

(v) $B \subset A$

(vi) A, B என்பவை ஒப்பிட முடியாதவை.

3. $A = \{x/x$ ஓர் இரட்டை முழு எண்$\}$
$B = \{x/x$ ஒரு மிகை (Positive) முழு எண்$\}$ என்றால் பின் வருவனவற்றில் எவை சரியானவை என்று கூறுக.

(i) $A \subseteq B$, (ii) $B \subseteq A$, (iii) $A = B$, (iv) A, B ஆகியவை ஒப்பிட முடியாதவை.

4. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ என்றால் P(X)ஐ எழுதுக. தேற்றம் 2·4-ன் உண்மையைச் சரி பார்க்க.

5. $A = \{2, 3\}$, $B = [\{\phi, (2), (3), \{(2, 3)\}, \{(2, 3), (3)\}]$, என்றால் பின் வருவனவற்றில் எவை எவை சரியானவை என்று காண்க.

(i) $A \subseteq B$, (ii) $B \subseteq A$, (iii) $A = B$, (iv) $A \subset B$, (v) $B \subset A$, (vi) A, B ஆகியவை ஒப்பிட முடியாதவை, (vii) $A \in B$ (viii) $\{A\} \in B$.

# 3. கணத்தின் இணைப்பும் வெட்டும்
## (Set union and intersection)

**3·1.** வரையறை : இரண்டு பொருட்களைத் தொடுத்து, தனித்த (unique) மற்றொரு பொருளைப் பெறும் செயலானது ஈருறுப்புச் செயல் (Binary operation) எனப்படும். இவ்வினையை ஈருறுப்புச் செயலி என்பதுமுண்டு.

சாதாரணமாக எண்களைக் கூட்டுதல் ஈறுருப்புச் செயல் ஆகும். உதாரணமாக $5+2=7$ என்பதில் 5 என்ற எண்ணையும் 2 என்ற எண்ணையும் கூட்டி 7 என்ற எண்ணைப் பெற்றுள்ளோம். பயன்படுத்தப்படும் பொருட்கள் 5, 2 ஆகிய எண்கள். கிடைக்கும் பொருள் 7 என்ற எண். செய்யப்படும் ஈருறுப்புச் செயலி 'கூட்டல்'. இதுபோலவே கணங்களுக்கிடையிலும் பின்வரும் ஈருறுப்புச் செயலிகளை நாம் வரையறுக்கலாம்.

**3·2.** வரையறை : A, B என்பன இரு கணங்கள் என்று வைத்துக்கொள்வோம். A, B ஆகிய இரு கணங்களிலும் உள்ள மூலகங்கள் மொத்தமாகச் சேர்ந்து இன்னொரு கணத்தை உண்டாக்குகின்றன. இப் புதுக் கணத்திற்கு A, B ஆகிய இரு கணங்களின் இணைப்பு (Set union) என்பது பெயர். இப் புதுக் கணத்தை $A \cup B$ என்று எழுதலாம். இவ்வாறாக,

$$A \cup B = \left\{ x \,/\, x \in A \text{ அல்லது } x \in B \right\}$$

**3·3.** எ.கா. : $A=\{1, 2, 3\}$ என்றும், $B=\{2, 5, 7\}$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால், $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

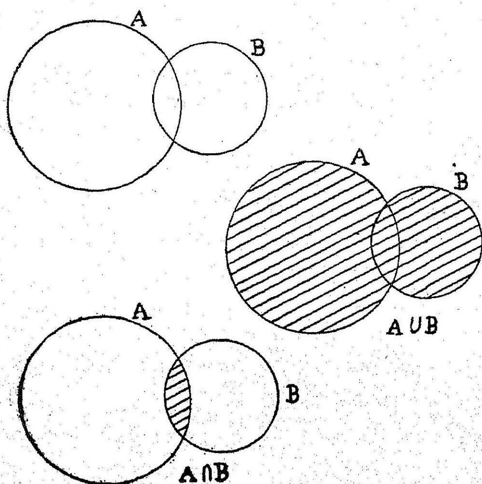
குறிப்பு : 'அல்லது' என்னும் சொல் இலக்கியத்தைப் பொறுத்தவரை 'இரண்டிலும் ஏதேனும் ஒன்று' என்பதைக் குறிக்கும். ஆனால் கணத்தைப் பற்றிய கோட்பாடுகளைப் பொறுத்தவரையில் "$x \in A$ அல்லது $x \in B$" என்பது 'A,B ஆகிய இரு கணங்களில் குறைந்தது ஒன்றிலாவது $x$ இருக்கும்' என்பதையே குறிக்கும்.

**3·4.** வரையறை : A, B என்ற இரு கணங்களிலும் பொதுவாக உள்ள மூலகங்களைப் பொறுக்கி எடுத்து, ஒரு கணத்தை உருவாக்க

லாம். இக் கணத்திற்கு A, B ஆகிய இரு கணங்களின் வெட்டு (Set intersection) என்பது பெயர். இப்புதுக் கணத்தை $A \cap B$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்வாருக,

$$A \cap B = \left\{ x \middle/ \begin{array}{l} x \in A \\ \& x \in B \end{array} \right\}$$

**3·5.** எ.கா.: $A=\{1, 2, 3\}$ என்றும், $B=\{2, 5, 7\}$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $A \cap B=\{2\}$.




படம் 1.

கணத்தின் இணைப்பு, கணத்தின் வெட்டு ஆகியவற்றை வரை படத்தின் மூலம் பின் வருமாறு விளக்கலாம். A என்ற வட்டத்தினுள் உள்ள புள்ளிகள் A என்ற கணத்தையும், B என்ற வட்டத்தினுள் உள்ள புள்ளிகள் B என்ற கணத்தையும் நிர்மாணித்தால் கோடிட்டுள்ள இடத்தில் உள்ள புள்ளிகள் முறையே $A \cup B$; $A \cap B$ ஆகியவற்றை நிர்மாணிக்கும். இவ்வாறு கணங்களை விளக்கும் படங்களுக்கு "வென் வரை படங்கள்" (Venn diagrams) என்பது பெயர்.

**3·6.** குணம்: $A \cup B \supseteq A$

இதை நிரூபிப்பதற்கு A-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் $A \cup B$-ல் உள்ளது என்று காட்டினால் போதும்.

நிரூபணம்: $x$ என்பது A-ன் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

எனவே $x$ என்பது $A \cup B$ இலும் மூலகமாக இருக்கும்.

($A \cup B$ இன் வரையறையிலிருந்து)

$\therefore A \subseteq A \cup B$ அதாவது $A \cup B \supseteq A$.

**3·7.** குணம்: $A \cup B \supseteq B$

[முன்போலவே இதையும் நிரூபிக்கலாம்.]

**3·8.** குணம் : $A \cap B \subseteq A$.

நிருபணம் : $X \in A \cap B$ என்க.

எனவே $x \in A$; அத்துடன் $x \in B$.

அதாவது $X \in A \cap B \Longrightarrow X \in A$

$\therefore A \cap B \subseteq A$.

**3·9.** குணம் : $A \cap B \subseteq B$ [முன்போலவே இதையும் நிரூபிக்கலாம்.]

**3·10.** குணம் : கணங்களுக்கான இணைப்பு (Union) என்னும் செயலி, பரிமாற்று விதி (Commutative law)க்கு உட்பட்டுள்ளது.

அதாவது $A \cup B = B \cup A$.

நிருபணம் : $x \in A \cup B$ என்க.

$\therefore x \in A$ அல்லது $x \in B$.

அதாவது $x \in B$ அல்லது $x \in A$

அதாவது $x \in B \cup A$

$\therefore X \in A \cup B \Longrightarrow x \in B \cup A$.

$\therefore A \cup B \subseteq B \cup A$. ... ... ... (1)

இதுபோல் $B \cup A \subseteq A \cup B$ என்று நிறுவலாம்.... ... (2)

1, 2 ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cup B$ - $B \cup A$.

**3·11.** குணம் : கணங்களுக்கான வெட்டு (intersection) என்னும் செயலி, பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டுள்ளது.

அதாவது $A \cap B = B \cap A$. [முன்போலவே இதையும் நிரூபிக்க.]

**3·12.** குணம் : $A \cup A = A$.

இதை, "கணங்களுக்கான இணைப்பின் கீழ் ஒவ்வொரு கணமும் தன்னுற்றல் மூலகம் (idempotent element)" என்றும் குறிப்பிடலாம்.

நிருபணம் : $x \in A \cup A$ என்க

$\therefore x \in A$ அல்லது $x \in A$

அதாவது $x \in A$.

இவ்வாறு $x \in A \cup A \Longrightarrow x \in A$

$\therefore A \cup A \subseteq A$ ... ... ... ... ... (1)

மேலும், குணம் 3·6-ல் B = A என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$A \cup A \supseteq A$ ... ... ... ... ... (2)

என்று கிடைக்கும்.

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cup A = A$.

**3·13.** குணம்: $A \cap A = A$. [இதை முன்போலவே நிரூபிக்க.]

**3·14.** குணம்: $A \cup \phi = A$

நிரூபணம்: குணம் 3·6-ல் $B = \phi$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$A \cup \phi \subseteq A$ ... ... ... ... ... (1)

மேலும் $x \in A \cup \phi$ என்றால்

$x \in A$ அல்லது $x \in \phi$

ஆனால் $x \in \phi$ என்னும்படியாக மூலகம் இல்லை.

எனவே $x \in A$. அதாவது $x \in A \cup \phi \Longrightarrow x \in A$.

$\therefore A \cup \phi \subseteq A$ ... ... ... ... ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cup \phi = A$.

**3·15.** குணம்: $A \cap \phi = \phi$

நிரூபணம்: $A \cap \phi$ என்பது வெற்றுக் கணமாக இல்லாவிட்டால் $x$ என்னும் மூலகம் $A \cap \phi$-ல் இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்க.

$x \in A \cap \phi \Longrightarrow x \in A$; அத்துடன் $x \in \phi$.

ஆனால் $x \in \phi$ என்பது சாத்தியமல்ல.

எனவே $x \in A \cap \phi$ என்னும்படியாக $x$ என்னும் மூலகம் இல்லை.

எனவே $A \cap \phi = \phi$

**3·16.** குணம்: $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

நிரூபணம்: இங்கு நாம் இரண்டு பாகங்கள் நிரூபிக்கவேண்டியுள்ளது. அதாவது $A \subseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$ என்றும், $A \cup B = B \Longrightarrow A \subseteq B$ என்றும் நிரூபிக்கவேண்டும்.

பாகம் 1:

$A \subseteq B$ என்று எடுத்துக்கொள்வோம்;

குணம் 3·7 இலிருந்து $A \cup B \supseteq B$ ... ... ... ...(1)

மேலும் $x \in A \cup B$ என்றால், $x \in A$ அல்லது $x \in B$.

$A \subseteq B$ என்பதால் $x \in A \Longrightarrow x \in B$.

$\therefore$ $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B$ அல்லது $x \in B$

அதாவது $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B$

$\therefore$ $A \cup B \subseteq B$ ... ... ... ...(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \cup B = B$.

அதாவது $A \supseteq B \Longrightarrow A \cup B = B$.

யாகம் 2 :

$A \cup B = B$ என்க. $A \subseteq B$ என்று நிரூபிக்க.

$x \in A$ என்க.

$x \in A \Longrightarrow x \in A \cup B$

$A \cup B = B$ என்பதால், $x \in A \cup B \Longrightarrow x \in B$.

இவ்வாறு $x \in A \Longrightarrow x \in B$

$\therefore$ $A \subseteq B$.

இவ்வாறு, $A \cup B = B \Longrightarrow A \subseteq B$.

**3·17. குணம்:** $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$

[முன்போலவே இதை நிரூபிக்கவும்.]

**3·18. குணம்:** கணங்களுக்கான இணைப்பு என்னும் செயலி சேர்ப்பு விதி (Associative law)க்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

அதாவது $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

நிரூபணம் : $x \in (A \cup B) \cup C$ என்க.

$\therefore$ $x \in (A \cup B)$ அல்லது $x \in C$

அதாவது $x \in A$ அல்லது B அல்லது C.

அதாவது $x \in A$ அல்லது $x \in B \cup C$

அதாவது $x \in A \cup (B \cup C)$

அதாவது $x \in (A \cup B) \cup C \Longrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$.

$\therefore$ $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ ... ... (1)

இதே வாதங்களைத் தலைகீழாக எடுத்துக்கொண்டு

$(A \cup B) \cup C \supseteq A \cup (B \cup C)$

என்று நிரூபிக்கலாம். ... ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

**3·19. குணம் :** கணங்களுக்கான வெட்டு என்னும் செயலி, சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

அதாவது $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

[முன்போலவே இதை நிரூபிக்க.]

**3·20. எ. கா. :** $A \cup B = \phi \Longrightarrow A = \phi$, $B = \phi$ என்று நிரூபிக்க.

**நிரூபணம் :** A,B ஆகிய இரண்டிலும் ஏதேனும் ஒன்று (A என்ற கணம்) மூலகத்தையுடைய கணம் என்று எடுத்துக் கொண்டால்,

$$A \cup B \supseteq A \quad \text{(குணம் 3·6 இலிருந்து)},$$

இப்பொழுது A-ல் மூலகம் இருப்பதால் $A \cup B$ இலும் மூலகம் இருக்கும். எனவே $A \cup B = \phi$ என்பது தவறு. இது மாறுபாடு (contradiction) எனவே, நாம் A-ல் மூலகம் உள்ளது என்று எடுத்துக்கொண்டது தவறு. அதாவது $A = \phi$. இதுபோல் $B = \phi$. இவ்வாறு $A \cup B = \phi \Longrightarrow A = \phi$, $B = \phi$.

கணத்தின் இணைப்பு, கணத்தின் வெட்டு ஆகியவை ஈருறுப்புச் செயலிகள் ஆகும் என்று முன்னரே கூறியுள்ளோம். மேலும் இச்செயலிகள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன. அதாவது $(A \cup B) \cup C$ என்று எழுதுவதும் $A \cup (B \cup C)$ என்று எழுதுவதும் ஒன்றுகும். எனவே இதை $A \cup B \cup C$ என்று அடைப்புக்குறி இன்றியே எழுதிவிடலாம். இந்த முறையை நாம் $A_1, A_2, \ldots A_n$ என்ற எந்த முடியும் அளவு (finite number) கணங்களுக்கும் விஸ்தரிக்கலாம். இவ்வாருக $A_1, A_2, \ldots A_n$ ஆகிய கணங்களின் இணைப்பை $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n$ என்று அடைப்புக் குறியின்றிக் குறிப்பிடலாம்.

இதையே $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ என்றும் குறிப்பிடலாம். [கணங்களின் இணைப்பு பரிமாற்று விதிக்கும் உட்பட்டிருப்பதால்.]

$I = \{1, 2, 3, \ldots n\}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், கணங்களின் இணைப்பு, பரிமாற்று விதிக்கும் உட்பட்டிருப்பதால், $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \bigcup_{i \in I} A_i$ என்று எழுதலாம். இங்கு I என்பது அடையாளக் கணம் (index set) எனப்படும். இதுபோல் $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$ என்பதை $\bigcap_{i \in I} A_i$ என்று குறிப்பிடலாம். $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ என்னும் கணங்களை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணமானது I என்னும் அடையாளக் கணத்தால் தூண்டப்படுகிறது என்றும் கூறுவதுண்டு.

அடையாளக் கணம் என்பது எண்களையே மூலகங்களாகக் கொண்டிருக்க வேண்டும் என்றோ அல்லது முடியும் அளவு (finite) மூலகங்களையே கொண்டிருக்கவேண்டும் என்றோ கட்டாயம் கிடையாது. J என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. J இல் உள்ள $x$ என்ற ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $A_x$ என்ற கணம் கொடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கொள்க. இப்போது இவ்வெல்லாக் கணங்களின் இணைப்பை $\bigcup_{x \in J} A_x$ என்றும், இவற்றின் வெட்டை $\bigcap_{x \in J} A_x$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

$A_x$ என்பவை S என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் என்றால் $\bigcup_{x \in \phi} A_x = \phi$ என்றும், $\bigcap_{x \in \phi} A_x = S$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

## பயிற்சி 3

1. $A \cap B = \phi$ என்பதை வைத்துக்கொண்டு $A = \phi$ என்றோ, $B = \phi$ என்றோ சொல்ல முடியாது என்பதற்கு ஓர் உதாரணம் கொடு.

2. $(A \cap A) \cap A = A$ என்றும் $(A \cap \phi) \cap A = \phi$ என்றும் நிரூபிக்க.

3. $A = \{x / x^2 = 1\}$ என்றும் $B = \left\{ \begin{matrix} x/x \text{ ஒருமெய் எண்;} \\ x^3 = 1 \end{matrix} \right\}$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால் $A \cap B$ ஐக் காண்க.

4. $A_1 = \{x, y, z\}$
$A_2 = \{x, y, p, q\}$
$A_3 = \{m, n, x, p, q\}$
$A_4 = \{t, m, q, y, n\}$
$A_5 = \{m, x\}$ என்க.

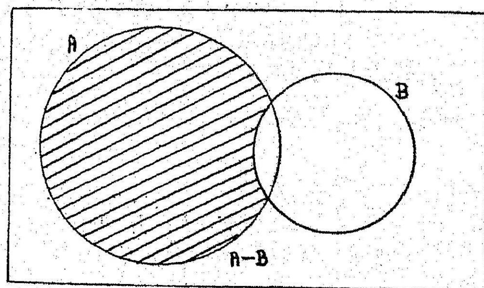
$J = \{3, 5, 1, 2\}$ என்றால் $\bigcup_{i \in J} A_i$, $\bigcap_{i \in J} A_i$ ஆகிய கணங்களைக் காண்க.

# 4. மற்றைய ஈருறுப்புச் செயலிகளும் ஓருறுப்புச் செயலியும்

## (Other Binary operations and Unitary operation)

**4·1.** வரையறை:- A, B என்பன இரு கணங்கள் என்று எடுத்துக் கொள்வோம். A-ன் மூலகங்களில், B-ன் மூலகங்களாக உள்ளவை போக மீதியுள்ளவைகள் சேர்ந்து உருவாக்கும் கணத்திற்கு A,B ஆகிய இரு கணங்களின் வித்தியாசம் (Difference of A and B) என்பது பெயர். இதனை A — B என்று எழுதுவது வழக்கம்.

இவ்வாறு $A - B = \left\{ x \,\middle/\, \begin{matrix} x \in A \,\& \\ x \notin B \end{matrix} \right\}$




படம் 2

வரை படத்தில் கோடிட்ட பாகம் A—B ஐக் குறிக்கும்.

**4·2.** எ. கா.: $A = \{r, y, z, p, q\}$ என்றும், $B = \{x, z, p, r, s, t, u, v\}$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால் $A - B = \{y, q\}$ ஆகும். இதை எழுதுவதற்கு நாம் A-ன் மூலகங்களில் B-ல் இருப்பவைகளை விட்டுவிட்டு மீதியை எழுதினால் போதும்.

**4·3.** குணம்: $A - A = \phi$

**4·4.** குணம்: $A \subseteq B \Longrightarrow A - B = \phi$

**4·5.** குணம்: $A - B = A - (A \cap B)$

**4·6.** குணம்: $A - B = A \cup B - B$.

**4·7. குணம்:** $(A-B)-C = A-(B\cup C)$

**4·8. குணம்:** $A-(B-C) = (A-B)\cup(A\cap C)$

**4·9. குணம்:** $(A\cup B)-C = (A-C)\cup(B-C)$

**4·10. குணம்:** $A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$

**4·11. குணம்:** $A = (A\cap B)\cup(A-B)$.

வரை படம் ஒன்றின் மூலம் மேற்கூறிய ஒவ்வொரு குணமும் சரியாகத்தான் இருக்கும் என்ற நம்பிக்கையை உருவாக்கிக் கொள்ளலாம். கீழே குணம் 4·8-ன் நிரூபணம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதுபோல் மற்றவைகளையும் நிரூபிக்க முடியும். (நிரூபிக்க).

**நிரூபணம்:** $A-(B-C) = (A-B)\cup(A\cap C)$ என்று நிரூபிக்க.

**பாகம் 1.** $x\in A-(B-C)$ என்க.

$x\in A \;\&\; x\notin (B-C)$

$x\notin (B-C)$ என்பது இரண்டு சந்தர்ப்பங்களில் மட்டுமே உண்மையாக இருக்கும்.

(i) $x\notin B$

(ii) $x\in C$.

எனவே $x\in A-(B-C)$ என்பதிலிருந்து பின்வரும் இணைப்புகளில் ஒன்றுவது உண்மையாக இருக்கவேண்டும்.

(i) $x\in A \;\&\; x\notin B$

(ii) $x\in A \;\&\; x\in C$

அதாவது $x\in A-B$ அல்லது $x\in A\cap C$

அதாவது $x\in (A-B)\cup(A\cap C)$.

$\therefore\; A-(B-C)\subseteq (A-B)\cup(A\cap C)$ (1)

**பாகம் 2:** $x\in (A-B)\cup(A\cap C)$ என்க.

$\therefore\; x\in (A-B)$ அல்லது $x\in A\cap C$

$\therefore\; x\in A \;\&\; x\notin B$ அல்லது $x\in A \;\&\; x\in C$

$\therefore\; x\in A \;\&\; (x\notin B$ அல்லது $x\in C)$

$\therefore\; x\in A \;\&\; x\notin (B-C)$

$\therefore\; x\in A-(B-C)$

$\therefore\; (A-B)\cup(A\cap C)\subseteq A-(B=C)$ (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A-(B-C) = (A-B) \cup (A \cap C)$.

குறிப்பு: இந்த நிரூபணம் முழுவதும் 'அல்லது' என்பதை, நாம் கணத்தைப் பற்றிய படிப்பில் சாதாரணமாக எடுத்துக்கொள்ளும் 'அத்துடன்/அல்லது' என்ற பொருளில்தான் உபயோகித்திருக்கிறோம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

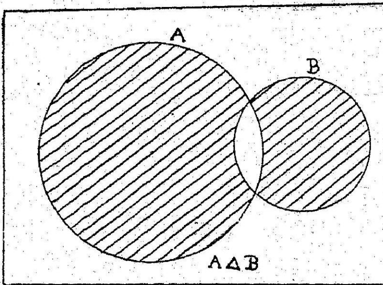
**4·12. குணம்:** A, B ஆகிய கணங்களின் வித்தியாசமும், B, A ஆகிய கணங்களின் வித்தியாசமும் சமமாக இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை.

அதாவது $(A-B)$ உம் $(B-A)$ உம், சமமாக இருக்க வேண்டியதில்லை. இதையே "கணங்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் '—' என்ற செயலி பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதல்ல" என்றும் கூறலாம்.

நிரூபணம்: இத்தகைய எதிரிடைக் குணங்களை நிரூபிப்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு போதுமானது. இங்கு $A = \{x, y\}$, $B = \{y, z\}$ என்று எடுத்துக் கொண்டால் $A-B = \{x\}$, $B-A = \{z\}$ அதாவது $A-B \neq B-A$.

**4·13. வரையறை:** A, B ஆகிய இரு கணங்களின் வித்தியாசம் $A-B$ என்றும், B, A ஆகிய இரு கணங்களின் வித்தியாசம் $B-A$ என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இப்போது $(A-B) \cup (B-A)$ என்ற கணம், A, B ஆகிய கணங்களின் சீர் வித்தியாசம் (Symmetric difference) எனப்படும். இதனை $A \triangle B$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்வாறு

$$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$$




படம் 3

படத்தில் கோடிட்ட பாகம் இரு கணங்களின் சீர் வித்தியாசத்தைக் கொடுக்கிறது.

**4·14. எ.கா.:** $A = \{x, y, z, p, q\}$
$B = \{x, z, p, q, r, s, t\}$ என்றால்,

$$A-B=\{y\} \quad ; \quad B-A=\{r, s, t\}$$
$$\therefore A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)=\{y, r, s, t\}$$

4·15. குணம்: $A\triangle B=B\triangle A$

4·16. குணம்: $A\triangle\phi=A$

4·17. குணம்: $A\triangle A=\phi$

4·18. குணம்: $A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

4·19. குணம்: $A\cap B=\phi \Longleftrightarrow A\triangle B=A\cup B$

4·20. குணம்: $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$

4·21. குணம்: $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

வரை படத்தின் மூலம் இக்குணங்கள் ஒவ்வொன்றும் சரியாகத் தான் இருக்கும் என்ற நம்பிக்கையை உருவாக்கிக் கொள்ளலாம். நாம் குணம் 4·19ஐ மட்டும் நிரூபிப்போம். மற்றவைகளை இது போல் நிரூபிக்கவும்.

நிரூபணம் :— $A\cap B=\phi \Longleftrightarrow A\triangle B=A\cup B$ என்று நிரூபிக்க.

பாகம் 1.

$A\cap B=\phi$ என்க. $A\cap B=\phi$ என்பதால் ஒரு பொருள் A-ன் மூலகமாக இருந்தால் அது B-ன் மூலகம் அல்ல. $\therefore A-B=A$. இதுபோலவே $B-A=B$ என்று நிரூபிக்கலாம். $\therefore (A-B)\cup(B-A)=A\cup B$. அதாவது $A\cap B=\phi \Longrightarrow A\triangle B=A\cup B$.

பாகம் 2.

$A\triangle B=A\cup B$ என்க.

$A\cap B\neq\phi$ என்றால் $X\in A\cap B$ என்க.

$\therefore X\notin A-B \;\&\; x\notin B-A$

$\therefore X\notin(A-B)\cup(B-A)=A\triangle B \quad (1)$

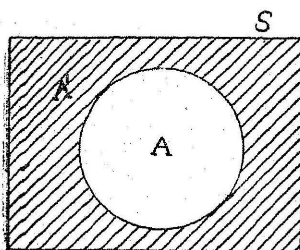
ஆனால் $x\in A\cup B \quad (2)$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A\cup B\neq A\triangle B$. இது மாறுபாடு.

எனவே $A\cap B$-ல் $x$ என்ற மூலகம் இல்லை. அதாவது $A\cap B=\phi$. இவ்வாறு $A\triangle B=A\cup B \Longrightarrow A\cap B=\phi$.

கணத்தைப் பற்றிப் படிக்குங்கால், நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் கணங்கள் அனைத்தும் ஒரு பெரிய கணத்தின் உட்கணங்கள் என்று எடுத்துக்கொள்வது வழக்கம். இப்பெரிய கணத்தை இன முழு மொத்த கணம் (Universal set) என்பது வழக்கம். இப்பெரிய கணத்தை S என்று எடுத்துக்கொள்வோம்.

**4·22.** வரையறை: A என்பது S என்ற இன முழுமொத்தக் கணத்தின் உட்கணம் என்க. இப்போது S-ன் மூலகங்களில் A-ல் உள்ளவைகளைத் தவிர மீதி மூலகங்களின் கூட்டம் நிர்ணயிக்கும் கணம் A-ன் நிரப்பு கணம் (Complement of A) எனப்படும். இதனை A′ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.




வரையறையிலிருந்து $A' = S - A$ என்பது விளங்கும். படத்தில் கோடிட்ட பாகம் A′ஐக் குறிக்கும்.

படம் 4

இன முழுமொத்த கணம் ஒன்றை முதலில் எடுத்துக் கொண்டால் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் ஒரு நிரப்புக்கணம் இருப்பதால் நிரப்புக் கணத்தை அடையும் விதம் ஓருறுப்புச் செயல் (Unary operation) ஆகும்.

**4·23.** எ. கா.: முழு எண்களின் கணத்தை இன முழு மொத்த கணமாக எடுத்துக்கொள்வோம். A என்பது மிகை (Positive) முழு எண்களின் கணம் என்றால் A′ என்பது குறை (Negative) முழு எண்களும் பூச்சியமும் சேர்ந்து உருவாக்கும் கணமாக இருக்கும்.

**4·24.** குணம்: $(A')' = A$

நிரூபணம்: $x \in (A')'$ என்க.

$\therefore\ x \notin A'$ (வரையறையிலிருந்து)

$\therefore\ x \in A$ (வரையறையிலிருந்து)

$\therefore\ (A')' \subseteq A$ ... ... ... (1)

$x \in A$ என்க.

$\therefore\ x \notin A'$ (வரையறையிலிருந்து)

$\therefore\ x \in (A')'$ (வரையறையிலிருந்து)

$\therefore\ A \subseteq (A')'$ ... ... ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(A')' = A$.

**4·25.** குணம்: $A \cup A' = S$

**4·26.** குணம்: $A \cap A' = \phi$

**4·27.** குணம் : $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**4·28.** குணம் : $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**4·29.** குணம் : $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)' = \bigcap_{i \in I} A_i'$

**4·30.** குணம் : $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

கடைசியாகக் குறிப்பிட்டுள்ள நான்கு விதிகளும் (4·27—4·30.) டிமார்க்கன் விதிகள் எனப்படும். நாம் குணம் 4·30 ஐ நிருபிப் போம். மீதியுள்ள குணங்களை இதுபோல் நிருபிக்க.

நிரூபணம் : $i \in I$ ஆக இருக்கும்போது $A_i$ என்பவை S என்ற கணத்தின் உட்கணங்கள் என்க. மேலும் நாம் எடுத்துக் கொள்ளும் வாதங்கள் அனைத்தும் S ஐ இன முழுமொத்த கணமாகக் கொண்டு நடக்கின்றன என்க.

பாகம் 1:

$$x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' \text{ என்க.}$$

$\therefore\ x \notin \bigcap_{i \in I} A_i$ [வரையறையிலிருந்து ; A′ என்பது Aஇல் இல்லாதமூல கங்களால் ஆனது.]

$\therefore\ x \notin A_i$ என்னும்படியாக $i$ என்னும் ஒரு மூலகமானது I-ல் உள்ளது. அதாவது $x \in A_i'$ என்னும்படியாக $i$ என்னும் ஒரு மூலக மாவது I-ல் உள்ளது.

$$\therefore\ x \in \bigcup_{i \in I} A_i'$$

$$\therefore\ \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i' \quad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ (1)$$

பாகம் 2 :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i' \text{ என்க.}$$

$\therefore\ x \notin A_i'$ என்னும்படியாக $i$ என்னும் ஒரு மூலகமாவது I-ல் உள்ளது. அதாவது, $x \notin A_i$ என்னும்படியாக $i$ என்னும் ஒரு மூலகமாவது I-ல் உள்ளது.

$$\therefore \quad x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \implies x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)'$$

$$\therefore \quad \bigcup_{i \in I} A_i' \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

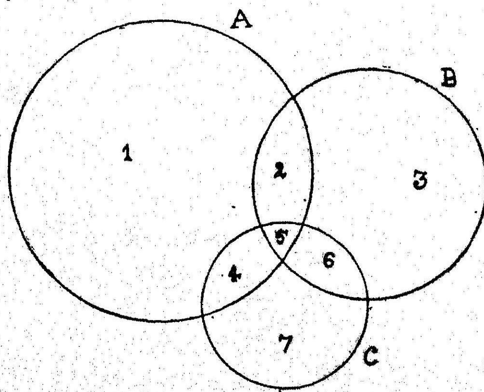
(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)' = \bigcup_{i \in I} A_i'$

*4·31.* குணம் : $S' = \phi$
*4·32.* குணம் : $\phi' = S$
*4·33.* குணம் : $A \subset B \iff B' \subset A'$
*4·34.* குணம் : $A - B = A \cap B'$
*4·35.* குணம் : $A \triangle B = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

வரை படம் ஒன்றின்மூலம் இக்குணங்கள் சரியாகத்தான் இருக்கும் என்ற நம்பிக்கையை அடையலாம். முறையாகவும் இவற்றை நிரூபிக்கவும்.

## பயிற்சி 4

1. $A - \phi = A$ என்று நிரூபிக்க.
2. $A - B = A \implies B = \phi$ என்பதற்கு உதாரணம் தரவும்.
3. குணம் 4·19 க்காகக் கொடுத்திருக்கும் நிரூபணத்தின் முதல் பாகத்தைக் குணம் 4·18 ஐ உபயோகித்து நிரூபிக்க. இரண்டாவது பாகத்தையும் இவ்வாறே நிரூபிக்க முடியுமா என்பதைக் காண்க.




படம் 5

4. 1, 2, 3 ... 7 ஆகிய கணங்களை A, B, C ஆகிய கணங்களின் வாயிலாக எழுதுக.

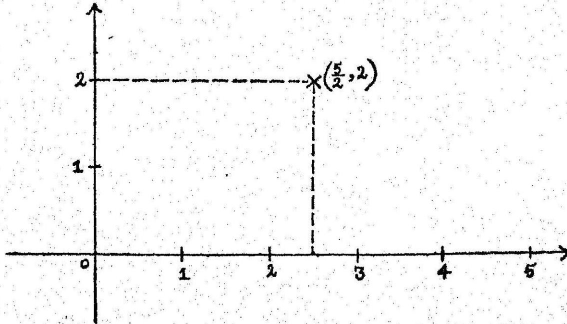
# 5. தொடர்புகளும் கூறிடலும்
## (Relations and Partitions)

**5·1.** வரையறை: A,B என்பவை எவையேனும் இரு கணங்கள் என்க. $a \in A$ என்றும் $b \in B$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் (a,b) என்னும் வரிசையிட்ட இரட்டை (ordered pairs)களை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணம், A, B ஆகிய கணங்களின் பெருக்கு கணம் (Product set) எனப்படும். இதை $A \times B$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். இவ்வாறு,

$$A \times B = \left\{ (a, b) \,\middle|\, \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix} \right\}$$

**5·2.** எ.கா.: $A = \{a, b, c\}$ , $B = \{c, d, e\}$ என்றால்
$A \times B = \{(a,c)\ (a,d)\ (a,e)\ (b,c)\ (b,d)\ (b,e)\ (c,c)\ (c,d)\ (c,e)\}$
$(a,c)$, $(a,d)$...முதலியவைதாம் $A \times B$-ன் மூலகங்கள்.

**5·3.** எ.கா: R என்பது மெய் எண்களின் (real numbers) கணத்தைக் குறிப்பிட்டால், $R \times R$ என்பது மெய் எண்களால் ஆன வரிசையிட்ட இரட்டைகளின் கணமாக இருக்கும். இதை $R^2$ என்றோ அல்லது யூக்ளீடியன் சமதளம் (Euclidean plane) என்றோ




படம் 6

குறிப்பிடுவது வழக்கம். சமதளத்தில் அல்லது கட்டத்தாளில் தமக்குள் செங்குத்தான இரண்டு நேர்கோடுகளை எடுத்து அவற்றின் மீது மெய் எண்களைப் பதித்தால் அந்தச் சமதளத்தில் உள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் $R^2$ இன் மூலகங்களால் குறிப்பிட முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 5·2இலிருந்து A என்ற கணத்தில் m மூலகங்களும், B என்ற கணத்தில் n மூலகங்களும் இருந்தால் $A \times B$ என்ற கணத்தில் mn மூலகங்கள் இருக்கும் என்பது தெரியும்.

**5·4.** குணம் : $A \times \phi = \phi$

நிரூபணம் : $A \times \phi \neq \phi$ என்ருல் $(a, b)$ என்று ஒரு மூலகமாவது $A \times \phi$-ல் இருக்க வேண்டும்.

$(a, b) \in A \times \phi \Longrightarrow a \in A \;\&\; b \in \phi$

ஆனால் $b \in \phi$ என்பது சாத்தியமல்ல.

ஆகவே $A \times \phi = \phi$.

**5·5.** குணம் : $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

நிரூபணம் : $a, b \in A \times (B \cup C)$ என்க.

$\therefore\ a \in A \;\&\; b \in (B \cup C)$

$\therefore\ a \in A \;\&\; b \in B$ அல்லது $b \in C$.

$\therefore\ (a \in A \;\&\; b \in B)$ அல்லது $(a \in A \;\&\; b \in C)$

அதாவது $(a, b) \in A \times B$ அல்லது $(a, b) \in A \times C$.

$\therefore\ (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

$\therefore\ A \times (BUC) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C) \ldots \ldots (1)$

மீண்டும் $(x, y) \in (A \times B) \cup A \times C$ என்க.

$\therefore\ (x, y) \in A \times B$ அல்லது $(x, y) \in A \times C$

$\therefore\ x \in A \;\&\; y \in B$ அல்லது $x \in A \;\&\; y \in C$

$\therefore\ x \in A \;\&\; (y \in B$ அல்லது $y \in C)$

அதாவது $x \in A \;\&\; y \in B \cup C$

அதாவது $x \in A \times (B \cup C)$

$\therefore\ (A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C) \ldots\ldots \ldots 2$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

**5·6.** குணம் : $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

(முன்போலவே இதை நிரூபிக்க).

**5·7.** குணம் : $A \times B = B \times A$ என்று சொல்ல முடியாது.

(ஓர் எடுத்துக்காட்டு கொடுத்து இதை நிறுவுக.)

**5·8.** வரையறை : R என்பது A-ன் மூலகம் ஒன்றையும், B-ன் மூலகம் ஒன்றையும் இணைக்கும் ஒரு நிபந்தனை என்க. A-ல் ஒன்றும், B–ல் ஒன்றுமாக எந்த இரு மூலகங்களை

எடுத்துக் கொண்டாலும் அவை R என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன அல்லது உட்படவில்லை என்று திட்டவட்டமாகக் கூற முடிந்தால் R என்ற நிபந்தனை, A, B ஆகிய கணங்களில் ஒரு தொடர்பை (Relation) நிர்மாணிப்பதாகக் கூறப்படும். இந்த நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு இரு மூலகங்கள் இருக்குமாயின் அவை குறிப்பிட்ட தொடர்பில் இருக்கின்றன என்கிறோம்.

$(x, y)$ என்னும் வரிசையிட்ட இரட்டை, மேற்குறிப்பிட்ட R என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டிருந்தால் நாம் "$x$-ன் தொடர்பில் இருப்பது $y$" (x is related to y) என்று கூறுகிறோம். இதையே $xRy$ என்று எழுதுகிறோம். எவையேனும் இரு மூலகங்கள் $(a, b)$ குறிப்பிட்ட நிபந்தனைக்கு உட்படாமலிருந்தால் "$a$ இன் தொடர்பில் இல்லாதது $b$" (a is not related to b) என்று குறிப்பிடுகின்றோம். இதையே $a \not R b$ என்று எழுதுகின்றோம்.

$aRb$ என்பதற்கும், $bRa$ என்பதற்கும் நிறைய வேறுபாடுகள் உண்டு. R என்பது "—இன் மூத்த சகோதரன்" என்று இருந்தால் $aRb$ என்பது '$a$ இன் மூத்த சகோதரன் $b$' என்பதைக் குறிக்கும். ஆனால், $bRa$ என்பது '$b$இன் மூத்த சகோதரன் $a$' என்பதைக் குறிக்கும். எனவே, $aRb$ என்பது $bRa$ என்பதைக் கொடுக்கிறது என்றோ, $aRb$ உம் $bRa$ உம் ஒரே உண்மையைத்தான் குறிக்கின்றன என்றோ சொல்ல முடியாது. $bRa$ என்பது உண்மையா என்று தனியாக நிபந்தனையிலிருந்துதான் கண்டுபிடிக்கவேண்டும்.

5·9. எ. கா.: Z என்பது முழு எண்களின் கணம் என்க. P என்பது நேர்த்திசை முழு எண்களின் கணம் என்க. $x \in Z$, $y \in P$ என்று இருக்கும்போது $x^2 = y$ என்பதை R என்ற நிபந்தனையாக எடுத்துக் கொள்க. இப்போது $-3 \in Z$, $9 \in P$ என்னும் மூலகங்களை எடுத்துக்கொண்டால், $(-3)^2 = 9$. எனவே இவ்விரண்டு மூலகங்களும் கொடுத்திருக்கும் நிபந்தனைக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன. அதாவது —3 இன் தொடர்பில் இருப்பது 9. அதாவது $_{-3}R_9$.

$2 \in Z$, $5 \in P$ ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொண்டால் $2^2 \neq 5$. ஆகவே, 2 இன் தொடர்பில் இல்லாதது 5. அதாவது $2 \not R 5$.

இந்த நாம் $x^2 = y$ ; $x \in Z$, $y \in P$ என்பது Z என்ற கணத்திலிருந்து P என்ற கணத்திற்கு ஒரு தொடர்பை ஏற்படுத்துகிறது என்று கூறுகின்றோம். Z என்ற கணத்தை இத் தொடர்பில் அரங்கம் (Domain) என்றும், P என்னும் கணத்தை இத் தொடர்பின் உப அரங்கம் (Co-Domain) என்றும் கூறுகின்றோம்.

ஒரு தொடர்பின் உப அரங்கமும் அரங்கமும், ஒரே கணமா யிருப்பின் நாம் ஒரு கணத்திற்குள்ளேயே வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு ஒன்றைப் பெறுகின்றோம். நாம் படிக்கப்போகும் முக்கிய மான தொடர்புகள் யாவும் இத்தகைய தொடர்புகளாகும்.

5·10. எ.கா.: Z என்பது முழு எண்களின் கணம் என்க.

$x$R$y$ என்பது "$x$ ஆல் வகுபடுவது $y$" என்பதனைக் குறிப்ப தாகக் கொள்க.

$_2R_4$; ஏனெனில் "2 ஆல் வகுபடுவது 4".

$_3R_{12}$; ஏனெனில் 3ஆல் வகுபடுவது 12"

$_{12}\not R_3$ ஏனெனில் 12 ஆல் வகுபடுவது 3" என்பது தவறு.

**தொடர்புகளுக்கான மாற்று வரையறை:**

R என்பது A,B ஆகிய கணங்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப் பட்டிருக்கும் தொடர்பு என்க. இப்போது

$$R^* = \left\{ (a, b) \middle/ \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \\ {}_aR_b \end{matrix} \right\}$$

என்ற கணமானது $(a, b)$ ஆகிய வரிசையிட்ட இரட்டைகளை $_aR_b$ ஆக இருக்கும்போது தன்னிடத்தே கொண்டுள்ளது. இவ்வாறு R* என்பது A×B என்ற கணத்தின் உட்கணமாகும். அதாவது ஒவ்வொரு தொடர்புக்கும் நாம் ஒரு கணத்தைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

மறுதலையாக, A×B-ன் ஒவ்வோர் உட்கணத்தையும் ஒரு தொடர்புடன் பின்வருமாறு இணைக்க முடியும். P என்பது A×B-ன் உட்கணம் என்க. R என்னும் தொடர்பை

$$_aR_b \Longleftrightarrow (a, b) \in P$$

என்று வரையறுக்கலாம். a∈A, b∈B என்ற எந்த இரு மூலகங்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் $(a, b) \in A \times B$. $P \subseteq A \times B$ என்பதால் $(a, b)$ என்பது Pஇல் இருக்கிறதா இல்லையா என்பதைத் திட்டவட்டமாகச் சொல்ல முடியும், அதாவது $_aR_b$ அல்லது $_a\not R_b$ என்பதைத் திட்ட வட்டமாகச் சொல்ல முடியும். ஆகவே R என்பது தொடர்பு ஆகும். இவைகளைப் பின்வரும் தேற்றமாகக் குறிப்பிடலாம்.

**5·11. தேற்றம்:** A, B ஆகிய இரு கணங்களுக்கும் இடை யில் வரையறுக்கக்கூடிய ஒவ்வொரு தொடர்புடனும் A×B-ன் உட்கணம் ஒன்றை இணைக்க முடியும். இதுபோல் A×B-ன் உட்கணம் ஒவ்வொன்றுடனும் ஒரு தொடர்பை இணைக்க முடியும்.

[மேலே கொடுத்திருப்பதே நிருபணமாக அமையும்.]

மேலே நாம் கூறியிருப்பவைகளிலிருந்து தொடர்பைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம் என்பது விளங்கும்.

5·12. வரையறை: $A \times B$-ன் உட்கணம் ஒவ்வொன்றும் Aஇலிருந்து Bக்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் தொடர்பு (Relation) எனப்படும்.

5·13. எ. கா.: கீழே கொடுக்கப்பட்டிருப்பன ஒவ்வொன்றும் தொடர்புகளே.

| வரிசை எண் | A | B | $a R b \Longleftrightarrow$ |
|---|---|---|---|
| (i) | முழு எண்கள் | முழு எண்கள் | $a < b$ |
| (ii) | ,, | ,, | $a \leq b$ |
| (iii) | ,, | ,, | $a—b$ என்பது $m$-ன் மடங்கு (multiple) |
| (iv) | மெய் எண் | மெய் எண் | $a—b$ ஒரு முழு எண். |

R என்பது $A \times B$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பு என்க. $R^{-1}$ என்ற நிபந்தனையை $b \in B$, $a \in A$ ஆக இருக்கும்போது

$$bR^{-1}a \Longleftrightarrow aRb$$

என்று வரையறை செய்க. $a \in A$, $b \in B$ என்றால், $aRb$ அல்லது $a \not R b$ என்பதைத் திட்டமாகக் கூற முடியும். எனவே, $bR^{-1}a$ அல்லது $b \not R^{-1} a$ என்பதையும் திட்டவட்டமாகக் கூற முடியும். ஆகவே, $R^{-1}$ என்பது BXA-ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பாகும். இவ்வாறாக AXB இல் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒவ்வொரு தொடர்பிற்கும் BXA-ல் ஒரு தொடர்பை வரையறுக்க முடியும்.

5·14. வரையறை: R என்பது $A \times B$-ல்வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பு என்க. $B \times A$-ல் $bR^{-1}a \Longleftrightarrow aRb$ என்று வரையறுக்கப்படும், $R^{-1}$ என்ற தொடர்பு R-ன் எதிர்மறைத் தொடர்பு (Inverse relation) எனப்படும்.

5·15 எ. கா.: $A = \{(1, 2, 3)$, $B = \{a, b\}$
$R = \{(1,a), (2,a), (2,b)\}$ என்று எடுத்துக்கொண்டால்
$R^{-1} = \{(a,1), (a,2), (b,2)\}$ ஆகும்.

5·16. எ. கா : $A = Z$, $B = Z$ என்க.

[Z என்பதை முழு எண்களின் கணத்தைக் குறிப்பதற்காகக் கொள்வோம்].

$aRb$ என்றால், $a < b$ என்று ஒரு தொடர்பை எடுத்துக் கொள்க. அதாவது R என்பது "-ஐ விடப் பெரியது" என்னும் தொடர்பை ஏற்படுத்துகிறது. இங்கு $R^{-1}$ என்பது "-ஐ விடச் சிறியது" என்ற தொடர்பைக் குறிக்கும்.

அதாவது $aRb \Longleftrightarrow a < b$ என்பதால்

$bR^{-1}a \Longleftrightarrow aRb \Longleftrightarrow a < b \Longleftrightarrow b > a.$

**5·17.** வரையறை : A என்ற கணத்தில் நாம் $R = A \times A$ என்ற தொடர்பை வரையறுக்கலாம். இத் தொடர்பு A என்ற கணத்தின் மேல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள **முழுத் தொடர்பு** (Universal relation) எனப்படும்.

**5·18.** வரையறை : X என்ற கணத்தில் $xRy \Longleftrightarrow x = y$ என்று வரையறுக்கப்படும் R என்ற தொடர்பு **அலகுத் தொடர்பு** (Identity relation) எனப்படும். இதை $I_x$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**5·19.** எ. கா: $X = \{x, y, z\}$ என்க.

இப்போது $I_x = \{(x, x), (y, y), (z, z)\}$ ஆகும்.

**5·20.** வரையறை : A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் R என்ற தொடர்பின் கீழ், A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் '$a$'க்கும் $aRa$ என்பது உண்மையாக இருந்தால் R ஒரு **பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு** (Reflexive Relation) எனப்படும்.

A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்படும் தொடர்புகளுக்கும் $A \times A$-ன் உட்கணங்களுக்கும் நேரடித் தொடர்பு உள்ளது என்பது நாம் அறிந்ததே. $A^* = \{(a, a) | \epsilon a\}$ என்க. இப்போது $A^*$ஐ உட்கணமாகக் கொண்ட தொடர்பு, பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு என்பது வரையறையிலிருந்து விளங்கும். மேலும் ஒவ்வோர் அலகுத் தொடர்பும் பிரதிபலிக்கும் தொடர்பாகும்.

**5·21.** எ. கா: Z என்னும் கணத்தில் R என்னும் தொடர்பை $aRb \Longleftrightarrow a \leq b$ என்று வரையறை செய்தால் R பிரதிபலிக்கும் தொடர்பாகும். ஏனெனில் $aRa \ \forall \ a \in Z$ ; ∴ $a \leq a$.

($\forall$ என்பதை ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் என்னும் பொருளில் நாம் உபயோகப்போம். இது for all, for every என்று படிக்கப்படும்.)

**5.22. எ. கா.:** மெய் எண்களின் (Real numbers) கணத்தில் $\not R$ என்னும் தொடர்பை $aRb \Longleftrightarrow a = 2b$ என்று வரையறுத்தால் இத்தொடர்பு பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு அல்ல. ஏனெனில் $3 \neq 2.3 \Longrightarrow 3 \not R 3$.

**குறிப்பு:**

இங்கு $oRo$; ஏனெனில் $0 = 2 \cdot 0$; ஆனால் R பிரதிபலிக்கும் தொடர்பாக இருக்கவேண்டும் என்றால், R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் $x$ க்கும் $xRx$ என்பது உண்மையாக இருக்கவேண்டும்.

**5·23. வரையறை:** R என்பது A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்பு என்க. $aRb$ என்பது உண்மையாக இருக்கும்போதெல்லாம் $bRa$ என்பதுவும் உண்மையாக இருந்தால் R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு (Symmetric relation) எனப்படும்.

இவ்வரையறையையே வேறு விதமாகக் குறிப்பிட்டால், "$aRb \Longrightarrow bRa$ என்றால் R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு" எனலாம்.

**5·24. எ.கா.:** Z என்ற கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow a - b$ ஓர் இரட்டை எண் என்று வரையறுக்க.

இப்போது $xRy \Longrightarrow x - y$ ஓர் இரட்டை எண்
$\Longrightarrow y - x$ ஓர் இரட்டை எண்
$\therefore yRx$.

இவ்வாறு $xRy \Longrightarrow yRx$. எனவே R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பாகும்.

**5·25. எ.கா.:** மேலேகுறிப்பிட்ட கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow a \leq b$ என்று வரையறுத்தால் அது சமச்சீர் தொடர்பு அல்ல.

ஏனெனில் ${}_2R_3 \because 2 < 3$
ஆனால் $3 \not R 2 \because 13 \leq 2$

**5·26. வரையறை:** A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள R என்ற தொடர்பில் $aRb$, $bRc$ ஆகிய இரண்டும் சேர்ந்து $aRc$ என்பதைக் கொடுக்குமாயின் R ஐக் கடத்தும் தொடர்பு (Transitive relation) என்கிறோம்.

மேற்கூறிய வரையறையில் $a, b, c$ ஆகியவை A–ன் எவையேனும் மூன்று மூலகங்களாகும். வரையறையை உட்கணங்களின் அடிப்படையில் கூறினால், "$A \times A$-ன் உட்கணம் ஒன்று கடத்தும் தொடர்பைக் குறிக்கவேண்டும் என்றால் $(a, b)$, $(b, c)$ ஆகிய இரண்டு மூலகங்களையும் அது கொண்டிருக்கும்போது $(a, c)$ என்ற மூலகத்தையும் கொண்டிருக்கவேண்டும்" எனலாம்.

**5·27. எ.கா.:** Z என்ற கணத்தில் $xRy \Longleftrightarrow x-y$ ஓர் இரட்டை எண் என்னும் தொடர்பை வரையறுக்க. இங்கு $a, b, c$ என்பவை எவையேனும் மூன்று மூலகங்கள் என்க.

$aRb \Longrightarrow a-b$ ஓர் இரட்டை எண்

$bRc \Longrightarrow b-c$ ஓர் இரட்டை எண்

$\therefore aRb \;\&\; bRc \Longrightarrow (a-b)+(b-c)$ ஓர் இரட்டை எண்.

$\Longrightarrow a-c$ ஓர் இரட்டை எண் $\Longrightarrow aRc$

இவ்வாறு $aR_b \;\&\; bRc \Longrightarrow aRc \;\forall\; a, b, c \in Z$.

$\therefore$ R ஒரு கடத்தும் தொடர்பு.

**5·28. எ.கா.:** மேலே குறிப்பிட்ட கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow a-b$ ஓர் ஒற்றை (odd) எண் என்று வரையறுத்தால் R ஒரு கடத்தும் தொடர்பு அல்ல.

**5·29. வரையறை:** பிரதிபலிக்கும் தன்மை, சமச்சீர் தன்மை, கடத்தும் தன்மை ஆகிய மூன்றையும் கொண்டுள்ள தொடர்பு சரிநிகர் தொடர்பு (Equivalence relatlon) எனப்படும்.

**5·30. எ.கா.:** Zஎன்ற கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow a-b$ ஓர் இரட்டை எண் என்று வரையறுத்தால்,

(i) $aRa \;\forall\; a \in Z$

[$\therefore$ "$a-a=0$ ஓர் இரட்டை எண்" $\forall\; a \in Z$].

(ii) R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு [முன்னர் நிறுவியது. 5·24]

(iii) R ஒரு கடத்தும் தொடர்பு [முன்னர் நிறுவியது. 5·27]

எனவே R ஒரு சரிநிகர் (Equivalence) தொடர்பாகும்.

**5·3. எ.கா.:** R என்பது சமதளத்தில் உள்ள முக்கோணங்களால் ஆன கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow a$ உம் $b$ உம் வடிவொத்த (Similar) முக்கோணங்கள் என்று வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்பு என்க.

(i) R என்பது பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு.

(ii) R ஒரு சமச்சீர் தொடர்பு.

ஏனெனில் $a$ உம், $b$ உம் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்" என்றால், $b$ உம் $a$ உம் வடிவொத்த முக்கோணங்கள்" ஆகும்.

(iii) R ஒரு கடத்தும் தொடர்பு.

ஏனெனில், $a$ உம், $b$ உம் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகவும், $b$ உம் $c$ உம் வடிவொத்த முக்கோணங்களாகவும் இருந்தால் $a$ உம், $c$ உம் வடிவொத்த முக்கோணங்களாக இருக்கும். எனவே R ஒருசரிநிகர் தொடர்பாகும்.

**5·32.** வரையறை : R என்பது A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சரிநிகர் தொடர்பு என்க. $a$ என்பது A-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்போது $\{x/aRx\}$ என்பது $a$-ன் தொடர்பில் உள்ள மூலகங்களைக் கொண்ட கணமாகும். இதனை R-ன் அடிப்படையில் $a$-ன் சரிநிகர் இனம் (equivalence class of 'a' with respect to R) எனக் கூறுவது வழக்கம். இது $[a]$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

இவ்வாறாக A-ன் மூலகம் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒரு சரிநிகர் இனம் உள்ளது.

**5·33.** குணம் : $a \in [a]$

நிரூபணம் : $[a] = \{x/aRx\}$ (வரையறைப்படி)

R என்பது சரிநிகர் தொடர்பு.

எனவே R பிரதிபலிக்கும் தன்மையுடையது.

ஆகவே $aRa$

$\therefore\ a \in [a]$ ($[a]$-ன் வரையறைப்படி)

**5·34.** குணம் : $[a] \cap [b] \neq \phi$ என்றால் $[a] = [b]$.

நிரூபணம் : $x \in [a] \cap [b]$ என்க.

$\therefore\ aRx \ \&\ bRx$

R, சமச்சீர் தொடர்பாகையால் $bRx \Longrightarrow xRb$

$\therefore\ aRx \ \&\ xRb$

R, கடத்தும் தொடர்பாகையால் $aRx \ \&\ xRb \Longrightarrow aRb$.

இப்போது $y$ என்பது $[b]$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$\therefore\ bRy$ ; மேலும் $aRb$ (முன்னர் நிறுவியது.)

இப்போது $aRb \ \&\ bRy \Longrightarrow aRy$ (R, கடத்தும் தொடர்பு)

$\therefore\ y \in [a]$ ($[a]$-ன் வரையறைப்படி)

$[b] \subseteq [a]$

இதுபோல் $[a] \subseteq [b]$ என்று நிறுவலாம்.

$\therefore\ [a] = [b]$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள குணம் 5·34 ஐத் தேற்றமாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்,

**5·35. தேற்றம்:** இரண்டு சரிநிகர் இனங்கள் வெட்டாதவையாகவோ (non-intersecting) அல்லது ஒன்றாகவோ (identical) இருக்கும்.

**5·36. எ.கா.:** Z என்ற கணத்தில் $aRb \Longleftrightarrow (a-b)$, மூன்றின் மடங்கு (multiple of 3) என்னும் தொடர்பை வரையறுக்க. இத் தொடர்பு ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாகும்.

இதில் $[0] = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
$[1] = \{\ldots -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
$[2] = \{\ldots -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
$[3] = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
$[4] = \{\ldots -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$

இங்கு நாம் வெவ்வேறான மூன்று சரிநிகர் இனங்களைப் பெற்றுள்ளோம். சரிநிகர் இனங்களின் மற்ற குணங்களை இவற்றிலிருந்து சரிபார்த்துக் கொள்ளலாம்.

**கூறிடல் (Partition)**

**5·37. வரையறை:** A என்பது மூலகத்தையுடைய கணம் என்க. A-ன் உட்கணங்களை மூலகங்களாகக் கொண்ட $\{X_i\}$ என்ற கணத்தை, பின்வரும் நிபந்தனைகள் உண்மையாய் இருக்கும் போது A-ன் கூறு (Partition) என்கிறோம்.

(i) $X_i \neq \phi \ \forall i$

(ii) $i \neq j \Longrightarrow X_i \cap X_j = \phi$

(iii) $\bigcup_i X_i = A$

$\{X_i\}$ -ன் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் கூறு இனம் (Partition Class) எனப்படும்.

**5·38. எ.கா.:** செவ்வக வடிவான ஒரு காகிதத்தைப் படத்தில் காட்டியுள்ளது போல் பிரித்தால் அது கூறிடல் (Partition) ஆகும்.

| $X_3$ | $X_1$ |
|---|---|
| $X_2$ | $X_4$ |

ஏனெனில், (i) $X_1, X_2, X_3, X_4$ ஆகியவை வெற்றுக் கணங்கள் அல்ல.

(ii) $i \neq j$ என்றால் $X_i \cap X_j = \phi$.

(iii) $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$ என்பது நாம் எடுத்துக் கொண்ட காகிதத்தைக் கொடுக்கிறது.

5·39. எ.கா.: $A = \{a, b, c, d, e\}$ என்க.

$$P = \left\{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\} \right\}$$ என்பது ஒரு கூறிடல் ஆகும்.

5·40. எ.கா.: எ.கா. 5·36-ல் உள்ள Z ஐ [0], [1], [2] ஆகிய கணங்களாகப் பிரித்தல் கூறிடல் ஆகும்.

5·41. தேற்றம்: வெற்றுக்கணம் அல்லாத ஒரு கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சரிநிகர் தொடர்பு அக்கணத்தில் ஒரு கூறிடலை ஏற்படுத்துகின்றது. மறுதலையாக வெற்றுக்கணம் அல்லாத ஒரு கணத்தின் கூறிடல் அதில் ஒரு சரிநிகர் தொடர்பை ஏற்படுத்துகின்றது. [இத் தேற்றத்தைச் சரிநிகர் தொடர்பைச் சேர்ந்த அடிப்படைத் தேற்றம் (fundamental theorem) என்பது வழக்கம்.]

நிரூபணம்: A என்ற கணத்தில் R என்ற சரிநிகர் தொடர்பு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளதாகக் கொள்க. $R_A$ என்பது R ஆல் A-ல் உண்டாக்கப்படும் சரிநிகர் இனங்களில் வேறுவேறான வற்றைக் (distinct) கொண்ட கணம் என்க. இப்பொழுது $R_A$ என்னும் கணத்தின் மூலகங்கள் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன.

(i) ஒவ்வொரு சரிநிகர் இனத்திலும் அதை நிர்மாணிக்கும் மூலகம் இருக்கிறது என்று நாம் நிரூபித்துள்ளோம் (குணம் 5·33). எனவே $R_A$-ன் மூலகங்களான கணங்கள் வெற்றுக்கணம் அல்லாதவையாகும்.

(ii) $R_A$-ன் மூலகங்கள் வேறுவேறானவையாக இருப்பதால், எவையேனும் இரண்டு மூலகங்களின் வெட்டு வெற்றுக்கணமாகத் தான் இருக்கும் (குணம் 5.34).

(iii) $A = \bigcup_{X \in R_A} X$ என்று காட்ட,

வலப் பக்கத்தில் இணைக்கப்படும் ஒவ்வொரு கணமும் A-ன் உட்கணமாகையால் $\bigcup_{X \in R_A} X$ என்னும் கணமும் A-ன் உட்கணமாகும். (1)

மேலும் A-ன் ஒவ்வொரு மூலகம் '$a$' ஐயும் கொண்டுள்ள சரிநிகர் இனம் $[a]$ ஒன்று உள்ளது. சரிநிகர் இனங்களின்

குணங்களின்படியும், நாம் $R_A$ஐ எடுத்துக்கொண்ட விதத்தின் படியும் $[a]$ அல்லது $[a]$ உடன் ஒன்றாகவே (identical) இருக்கும் ஒரு சரிநிகர் இனம் $R_A$-ல் இருக்கவேண்டும். எனவே A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் $\bigcup_{X \in R_A} X$-ல் இருக்கிறது என்பது தெளிவு....(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $A = \bigcup_{X \in R_A} X$

இப்பொழுது (i), (ii), (iii), ஆகியவற்றிலிருந்து $R_A$ என்பது A-ன் ஒரு கூறு ஆகும்.

மறுதலையாக, $S = \{X_i\}$ என்பதை A-ன் ஒரு கூறு என்க.

A-ல் $aRb \Longleftrightarrow$ $a$-ம் $b$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் (partition class) சேர்ந்தவை என்ற ஒரு நிபந்தனையை வரையறை செய்க.

$\bigcup_i X_i = A$ என்பதால் A-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் அதைக் கொண்டுள்ள ஒரு கூறு இனம் உண்டு. எனவே, R என்பது தொடர்பாகும். மேலும் $a$ என்ற மூலகமும் $a$ என்ற அதே மூலகமும் ஒரே கூறு இனத்தில் இருப்ப தால் $aRa \ \forall \ a \in A$. ... ... ... (1)

$aRb \Longrightarrow$ $a$-ம் $b$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் சேர்ந்தவை.
$\Longrightarrow$ $b$-ம் $a$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் சேர்ந்தவை.
$\Longrightarrow bRa$.

$\therefore$ R என்பது சமச்சீர் தொடர்பாகும். ... ... (2)

$aRb$ & $bRc$ என்க.

$\therefore$ $a$-ம், $b$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் சேர்ந்தவை. அத்துடன் $b$-ம் $c$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் சேர்ந்தவை. ஆனால், $b$ஐக் கொண்டுள்ள கூறு இனம் ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு. எனவே, $a$-ம் $c$-ம் ஒரே கூறு இனத்தைச் சேர்ந்தவை.

இவ்வாறு, $aRb$ & $bRc \Longrightarrow aRc$ ... ... ... (3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து R ஒரு சரிநிகர் தொடர் பாகும். இவ்வாறு A-ன் கூறு ஒன்று அதில் ஒரு சரிநிகர் தொடர்பை ஏற்படுத்துகின்றது.

## பயிற்சி

1.

| தொடர்பு | அரங்கம் $(x)$ | உப அரங்கம் $(y)$ | நிபந்தனை $(xRy \Longleftrightarrow)$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | ஆண்கள் | பெண்கள் | $x$ இன் மனைவி $y$ |
| $R_2$ | கல்லூரி மாணவர்கள் | கல்லூரி நூல் நிலையத்தில் உள்ள புத்தகங்கள் | $x$ ஆல் படிக்கப்பட்டது $y$ |
| $R_3$ | நாட்டு மக்கள் | நாட்டு மக்கள் | $x$-ன் மகன் $y$ |
| $R_4$ | ,, | ,, | $x$-ன் சகோதரன் $y$ |
| $R_6$ | ,, | ,, | $x$ பிறந்த அதே நாள் பிறந்த நபர் $y$. |
| $R_7$ | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் | $x$-ம், $y$-ம் ஆதி (origin) யிலிருந்து ஒரே தூரத்தில் உள்ளன. |
| $R_8$ | Z | Z | $(x-y)$ என்பது 7-ன் பெருக்குத் தொகை. |
| $R_9$ | Z | Z | $x = \pm y$. |
| $R_{10}$ | N×N | N×N | $(a,b)R(c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c$. |
| $R_{11}$ | ,, | ,, | $(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc$ |

மேலே கொடுத்திருப்பவற்றிலிருந்து பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

| தொடர்பு | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_6$ | $R_7$ | $R_8$ | $R_9$ | $R_{10}$ | $R_{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| பிரதிபலிக்கும் | | | | | | | | | | | |
| சமச்சீர் | | | | | | | | | | | |
| கடத்தும் | | | | | | | | | | | |
| சரிநிகர் | | | | | | | | | | | |

2. A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் R என்னும் தொடர்பு, சமச்சீர் தொடர்பாகவும் கடத்தும் தொடர்பாகவும் இருக்கிறது என்க. பின்வரும் வாதங்கள் "R பிரதிபலிக்கும் தொடர்பாகவும் இருக்கும்" என்பதை நிருபிப்பதுபோல் தோன்றலாம்.

$a \in A$ என்க.

$a\,R\,b$ என்னும்படியாக $b$ என்னும் ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தை எடுத்துக் கொள்க. R என்பது சமச்சீர் தொடர்பாகையால் $aRb \Longrightarrow bRa$. இப்பொழுது $aRb \;\&\; bRa \Longrightarrow aRa$ (R கடத்தும் தொடர்பாகையால்). எனவே R பிரதிபலிக்கும் தொடர்பாகும்.

ஆனால் $A = \{a, b, c\}$ என்றும், $R = \{(b, c), (c, b), (b, b)$ $(c, c)\}$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால் (i) R, சமச்சீரானது; (ii) R, கடத்தும் தன்மையுடையது; ஆனால் R பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு அல்ல [$\because (a, a) \notin R$].

எனவே, முன்னர் நாம் கொடுத்துள்ள வாதங்களில் தவறு இருக்கவேண்டும். தவறு எங்கு உள்ளது என்பதை மேலே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டின் உதவிகொண்டு கண்டுபிடிக்க.

3. பின்வரும் வகையிலான தொடர்புகளுக்கு எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

| எண் | பிரதிபலிக்கும் | சமச்சீர் | கடத்தும் |
|---|---|---|---|
| 1. | × | × | × |
| 2. | × | × | ✓ |
| 3. | × | ✓ | × |
| 4. | × | ✓ | ✓ |
| 5. | ✓ | × | × |
| 6. | ✓ | × | ✓ |
| 7. | ✓ | ✓ | × |
| 8. | ✓ | ✓ | ✓ |

' என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் R என்ற தொடர்பு "$aRb$ & $bRa \Longrightarrow a=b$" என்னும் விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் R எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு (Anti symmetic relation) எனப்படும். கணங்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்பட்ட $\subseteq$ என்பதுவும், மெய் எண்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்படும் $\leq$ என்னும் தொடர்பும், எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகளாகும். வேறு இரண்டு எதிர் சமச்சீர் தொடர்புகளைத் தருக.

# 6. சார்புகள்

## (Functions)

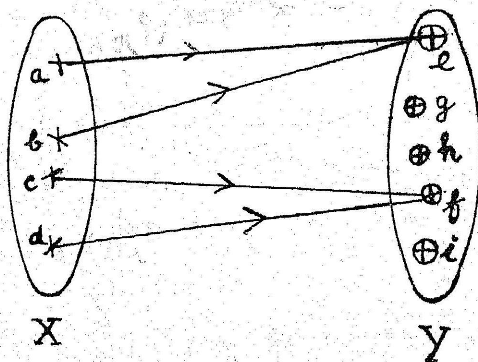
**6·1. வரையறை :** X, Y என்பன வெற்றுக்கணம் அல்லாத இரு கணங்கள் என்க. X-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் Y-ல் உள்ள தனித்த ஒரு (unique) மூலகத்தை நியமிக்கும் ஒரு முறையை X இலிருந்து Y-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு (function) என்கிறோம். இந்த நியமன முறையை அமைப்பு மாற்றம் (mapping), நிலை மாற்றம் (transformation), செயலி (operator) முதலிய பெயர்களாலும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

மேலே குறிப்பிட்ட சார்பை $f: X \to Y$ என்றோ அல்லது '$f$' என்றோ குறிப்பிடலாம். X இலிருக்கும் $x$ என்னும் மூலகத்திற்காக நியமிக்கப்படும் Y-ன் மூலகத்தை $f(x)$ என்றோ அல்லது $(x)f$ ["$f$ of $x$" என்று படிக்கப்படும்] என்றோ குறிப்பிடுதல் வழக்கம். [நாம் தேவைக்கேற்ப, $f(x)$ என்றோ $(x)f$ என்றோ உபயோகிப்போம்.] இதனை $f$ என்ற சார்புக்கு $x$-ல் உள்ள மதிப்பீடு (value of $f$ at $x$) என்றும், $f$ என்ற சார்பின் கீழ் $x$-ன் பிம்பம் (image of $x$ under $f$) என்றும் கூறுவதுண்டு. இவ்வாறாக $x \in X$ என்றும் $f: X \to Y$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால் $f(x) = (x)f \in Y$ என்பது விளங்கும். மேலும் X-லிருக்கும் $a$ என்ற மூலகத்திற்கு Y-ல் $b$ என்ற மூலகம் நியமிக்கப்பட்டிருந்தால், $b$ என்பது $a$-ன் பிம்பம் (image) என்றும், $a$ என்பது $b$-ன் மூல பிம்பம் (pre image) என்றும் பெயர் பெறும். இவ்வாறு $b$-ன் மூல பிம்பங்கள் சேர்ந்த கணம் $f^{-1}(b)$ எனப்படும். ["$f$ inverse $b$" என்று படிக்கப்படும்.] இவ்வாறு $f^{-1}(b) \{x | f(x) = b\}$

சார்பில் இரண்டாம் கணத்தைவிட முதல் கணம் முக்கியத்துவம் வகிக்கிறது. இங்கு X என்பதை அரங்கம் (domain) என்றும் Y என்பதை உப அரங்கம் (co-domain) என்றும் சொல்வது வழக்கம்.

$\{f(x) | x \in X\}$ என்னும் கணம் Y-ன் உட்கணமாக இருக்கும். இதை $f$ என்ற சார்பின் வீச்சு (Range) என்று கூறுவோம்.

**6·2. எ. கா. :** கீழே உள்ள படத்தில் கொடுத்திருக்கும் நியமனங்கள் ஒரு சார்பைக் குறிப்பிடுகின்றன. இங்கு அரங்கத்தில் உள்ள மூலகங்களை எடுத்துப் பார்த்தால்,

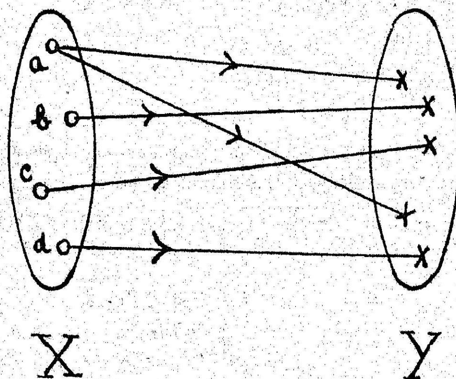



படம் 7

| | |
|---|---|
| $a \to e$<br>$b \to e$<br>$c \to f$<br>$d \to f$ | $\to$ என்பதை நாம் "goes to" என்றோ "is mapped to" என்றோ அல்லது "உடன் இணைக்கப் பட்டிருக்கும் மூலகம்" என்றோ படிக்கலாம். |

இவ்வாறு X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் Y-ல் ஒரே ஒரு மூலகம் நியமிக்கப்பட்டுள்ளது.

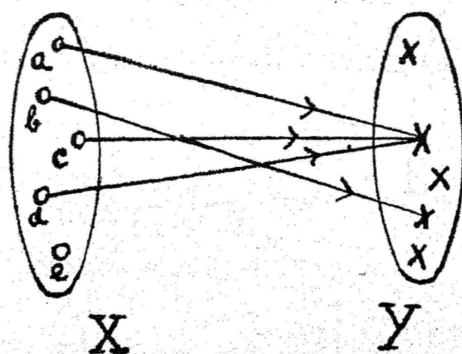
**6·3.** எ. கா. : இங்கு வரையறுக்கப்பட்டிருப்பது சார்பு அல்ல. ஏனெனில் X-ன் மூலகமாகிய *a* க்கு Y-ல் இரண்டு மூலகங்கள்




படம் 8

நியமிக்கப்பட்டுள்ளன. (சார்பாயிருக்க வேண்டுமாயின், அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரே ஒரு மூலகம்தான் உப அரங்கத்தில் இருக்க வேண்டும்.)

**6·4. எ. கா. :** இங்கும் X இலிருந்து Y-க்குச் சார்பு வரையறுக்கப்படவில்லை.




படம் 9

ஏனெனில் அரங்கத்திலுள்ள *e* என்ற மூலகத்திற்குப் பிம்பம் வரையறுக்கப்படவில்லை.

மொத்தத்தில் X இலிருந்து Yக்கு ஒரு சார்பு இருக்க வேண்டுமானால்,

(i) X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் Y-ல் ஒரே ஒரு மூலகம் நியமிக்கப்பட்டிருக்கவேண்டும்.

(ii) Y-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகத்தையும் X-ல் உள்ள ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுக்கு நியமிக்கலாம்.

(iii) Y-ல் உள்ள மூலகங்களில் சில X-ல் உள்ள எந்த மூலகத்திற்கும் நியமிக்கப்படாமல் இருக்கலாம்.

ஆனால்,

(i) X-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகமும் Y-ல் உள்ள ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட மூலகங்களுடன் இணைக்கப்பட்டிருக்கக் கூடாது.

(ii) X-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகமும் பிம்பம் இன்றி இருக்கக்கூடாது.

எடுத்துக்காட்டுகளில் கொடுத்துள்ளதுபோல் படத்தின் மூலம் விளக்கினால் "அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திலிருந்தும் ஒரே ஒரு கதிர் புறப்படவேண்டும்." வேறு விதமாகக் கூறினால் சார்பின் வேலை, அரங்கம், உப அரங்கம் ஆகியவற்றின் மூலகங்களை இரண்டிரண்டாகத் தொடுப்பது. இத் தொடுப்பில் அரங்கத்தில் உள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒரே ஒரு முறைதான் உபயோகிக்கப்படுகிறது.

**6·5. எ.கா.:** நாட்டு மக்களை அரங்கமாகவும், வாரத்தில் உள்ள கிழமைகளை உப அரங்கமாகவும் எடுத்துக்கொண்டு "$x$ பிறந்தது $y$ கிழமையில்" என்றால் $f(x)=y$ என்று வரையறை செய்தால் $f$ ஒரு சார்பாகும். அதாவது கோபால் பிறந்தது புதன் கிழமையில் என்றால் "$f$ (கோபால்) = புதன்" என்று வரையறுத்திருக்கிறோம்.

**6·6. வரையறை:** ஒரு சார்பின் வீச்சானது (Range) ஒரே ஒரு மூலகத்தை மட்டும் கொண்டிருந்தால் அச் சார்பு மாறுச் சார்பு (Constant function) எனப்படும்.

**6·7. வரையறை:** $f$ என்பது A இலிருந்து B-க்கு நிர்மாணிக்கப் பட்டுள்ள சார்பு என்க. $f$-ன் வீச்சு உப அரங்கத்தின் முறையான உட்கணமாகவோ அல்லது உப அரங்கமாகவோ இருக்கலாம். $f$-ன் வீச்சு உப அரங்கமாக இருப்பின் $f$ என்பது முழுச்சார்பு (onto function, onto mapping) எனப்படும். அதாவது "$f$ என்பது A இலிருந்து Bக்கு நிர்மாணிக்கப்பட்டுள்ள முழுச்சார்பு" என்று கூறுவோம். இதையே $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$ என்றோ $f: A \xrightarrow{\text{முழு}} B$ என்றோ குறிப்பிடலாம். $f$-ன் வீச்சு உப அரங்கத்தின் (B-ன்) முறையான உட்கணமாக (Proper subset) இருந்தால் $f$ என்பது உட்சார்பு (into mapping, into function) எனப்படும். இதையே $f: A \xrightarrow{\text{into}} B$ என்றோ $f: A \xrightarrow{\text{உள்}} B$ என்றோ குறிப்பிடலாம்.

**6·8. எ.கா.:** எ.கா. 6·2-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் சார்பு முழுச்சார்பு அல்ல. ஏனெனில் இச் சார்பின் வீச்சு $\{e, e, f, f\} = \{e, f\}$ ஆகும். இது $Y = \{e, f, g, h, i\}$ என்ற உப அரங்கத்தின் முறையான உட்கணம் ஆகும்.

**6·9. எ.கா.:** $A = Q$ ; $B = Q$ என்க.

[Q என்பது விகிதமுறு எண்களின் கணத்தைக் குறிக்கும்.]

A இலிருந்து B-க்கு $g$ என்ற நியமனத்தை $g(x) = 2x$ என்று வரையறை செய்க. A இலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் தனித்த பிம்பம் இருப்பதால் $g$ ஒரு சார்பாகும். இச் சார்பு முழுச் சார்பாகும். இதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$x$ என்பது B-ன் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$\frac{x}{2}$ என்னும் மூலகம் A-ல் உள்ளது.

இப்போது $g\left(\frac{x}{2}\right) = 2.\frac{x}{2} = x.$

அதாவது $x$ ஐப் பிம்பமாகக் கொண்ட மூலகம் ஒன்று A-ல் உள்ளது. எனவே உப அரங்கத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் பிம்பமாகும். அதாவது $g$ ஒரு முழுச்சார்பு.

மேலே கொடுத்துள்ள வாதத்திலிருந்து ஒரு சார்பு முழுச் சார்பாக இருக்கவேண்டும் என்றால், உப அரங்கத்தில் உள்ள எந்த ஒரு மூலகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் அது அரங்கத்தில் உள்ள ஒரு மூலகத்திற்காவது பிம்பமாக இருக்கவேண்டும். இவ்வாறன்றி மூல பிம்பம் இல்லாத மூலகங்கள் எவையேனும் உப அரங்கத்தில் இருக்குமாயின், அச் சார்பு முழுச்சார்பு அல்ல; உட்சார்பாகும்.

**6·10.** வரையறை: ஒரு சார்பின் கீழ் அரங்கத்தில் உள்ள வெவ்வேறான எந்த இரு மூலகங்களின் பிம்பங்களும் வெவ்வேறாக இருப்பின் அச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு (one to one function, one to one mapping) எனப்படும்.

அதாவது $f: X \longrightarrow Y$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக இருக்கவேண்டுமென்றால் $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. $f: X \underset{1-1}{\rightarrow} Y$

ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு என்பதை $f: X \longrightarrow Y$ என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

**6·11.** எ. கா.: $A = Q$; $B = Q$ என்க.

$f: A \rightarrow B$ என்ற சார்பை $f(x) = 2x$ என்று வரையறை செய்தால் $f$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும். இதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$a, b$ ஆகிய இரண்டு மூலகங்களும் ஒரே பிம்பத்தை உடையன என்க. அதாவது $f(a) = f(b)$, அதாவது $2a = 2b \Longrightarrow a = b$. எனவே இரண்டு மூலகங்களின் பிம்பங்கள் ஒன்றாயிருந்தால் அம்மூலகங்களும் ஒன்றாயிருக்கின்றன. அதாவது இரண்டு வெவ்வேறான மூலகங்களுக்கு ஒரே பிம்பம் இருக்கமுடியாது. எனவே $f$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

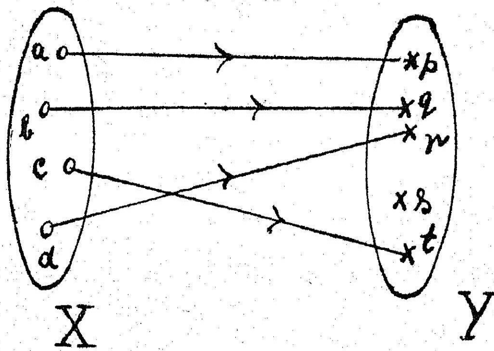
இம் முறைப்படி ஒரு சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு அல்ல என்று நிறுவுவதற்கு எவையேனும் இரு மூலகங்களுக்கு ஒரே பிம்பம் உள்ளது என்று காண்பித்தால் போதும்.

**6·12.** எ.கா.: $A = N$, $B = N$ என்க.

$f: A \rightarrow B$ என்னும் நியமனத்தை $x \longrightarrow x^2$ என்று வரையறை செய்க. [$f(x) = x^2$ என்பதையே $x \longrightarrow x^2$ என்று குறிப்

பிட்டுள்ளோம்.] N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரே ஒரு பிம்பம் இருப்பதால் இது சார்பாகும். A என்பது நேர்த்திசை எண்களையே கொண்டுள்ளதால் வெவ்வேருன எந்த இரு மூலகங்களுக்கும் வெவ்வேருன பிம்பங்கள் இருக்கும். ஆகவே $f$ ஒன்றுக்கொன்ருன சார்பாகும். முழு வர்க்கம் அல்லாத எண்களும் (2, 5, 7, 8 போன்றவை) B-ல் இருப்பதால், அவற்றிற்கு மூல பிம்பம் (Pre-image) இல்லை. எனவே $f$ முழுச்சார்பு அல்ல.

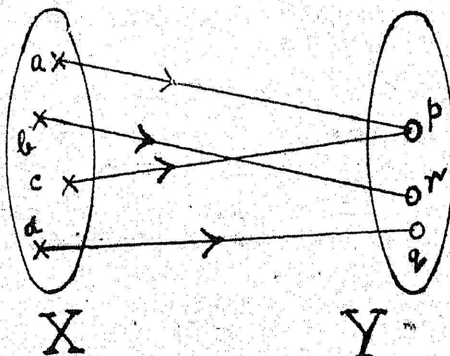
**6·13. எ.கா. :** இங்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் நியமனம்




படம் 10

X இலிருந்து Y-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒன்றுக்கொன்ருன சார்பாகும். ஆனுல் முழுச்சார்பு அல்ல; உட்சார்பு.

**6·14. எ.கா. :** இங்குக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் நியமனம்




படம் 11

X இலிருந்து Y-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள முழுச்சார்பு; ஆனுல் ஒன்றுக்கொன்ருன சார்பல்ல. இச் சார்பை வரைபடம் இன்றிப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

$$X = \{a, b, c, d\} \ , \ Y = \{p, q, r\}$$

$f : X \longrightarrow Y$ என்ற சார்பை $f(a) = p$

$f(b) = q$

$f(c) = p$

$f(d) = r$ என்ற விதிகள் நிர்ணயிக்கின்றன.

**6·15.** வரையறை: A இலிருந்து A-க்கு $f(x) = x$ என்று வரையறுக்கப்படும் சார்பு அலகுச் சார்பு (identity function) எனப் படும். A என்ற கணத்தில் வரையறுக்கப்படும் அலகுச் சார்பை $I_A$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

வரையறையிலிருந்து $I_A : A \rightarrow A, \ I_A(x) = x \ \forall \ x \in A$. அலகுச் சார்பானது ஒன்றுக் கொன்றான முழுச்சார்பாகும்.

**6·16** வரையறை: $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ என்பன X என்ற கணத்திலிருந்து Y என்ற கணத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு சார்புகள் என்க. X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் இந்த இரண்டு சார்புகளின் அடிப்படையில் கிடைக்கும் இரண்டு பிம்பங்களும் ஒன்றாயிருப்பின் $f$-ம், $g$-ம் சமமான சார்புகள் (equal functions) என்கிறோம். இதை $f = g$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

அதாவது $f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x) \ \forall \ x \in X$ எனலாம். மேற் கூறிய வரையறையிலிருந்து, "இரு சார்புகள் ஒன்றாயிருக்க வேண்டுமாயின் அவை இரண்டின் அரங்கம், உப அரங்கம் ஆகியவை ஒன்றாயிருப்பதோடு ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பிம்பமும் ஒன்றாயிருக்க வேண்டும்" எனலாம்.

**கணங்களின் பிம்பங்களும் மூல பிம்பங்களும்**

$f : X \rightarrow Y$ என்பது ஒரு சார்பு என்க. $A \subseteq X, B \subseteq Y$ என்க. பின்வரும் குறியீடுகளால் பின்வரும் கணங்களைக் குறிப்பிடலாம்.

$f(A) = \{f(x) / x \in A\}$. இங்கு $f(A)$ என்பது உப அரங்கமாகிய Y-ன் உட்கணமாகும். இதை A என்ற கணத்தின் பிம்பம் (image of the set A) என்பது வழக்கம்.

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \Big/ \begin{matrix} x \in X \\ f(x) \in B \end{matrix} \right\}.$$

இங்கு $f^{-1}(B)$ என்பது X-ன் உட்கணமாகும். இதை B என்ற கணத்தின் மூல பிம்பம் (pre-image of B) என்றும், B என்ற கணத் தின் இணைந்த ஆதி (Total original of B) என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**6·17.** குணம் : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

நிருபணம் : $f: x \to y$ என்றால், $f(A \cup B)$, $f(A)$, $f(B)$ ஆகியவை அனைத்தும் Y-ன் உட்கணங்களாகும்.

$x \in f(A \cup B)$ என்க.

∴ $f(x_1) = x$ என்னும்படியாக $x_1$ என்னும் மூலகம் $A \cup B$-ல் உள்ளது.

$x_1 \in A$ அல்லது $x_1 \in B$ [அல்லது = அல்லது/அத்துடன்]

∴ $f(x_1) \in f(A)$ அல்லது $f(B)$

அதாவது $x \in f(A)$ அல்லது $f(B)$.

அதாவது $x \in f(A) \cup f(B)$.

$$\therefore \; f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது $y \in f(A) \cup f(B)$ என்க.

∴ $y \in f(A)$ அல்லது $f(B)$.

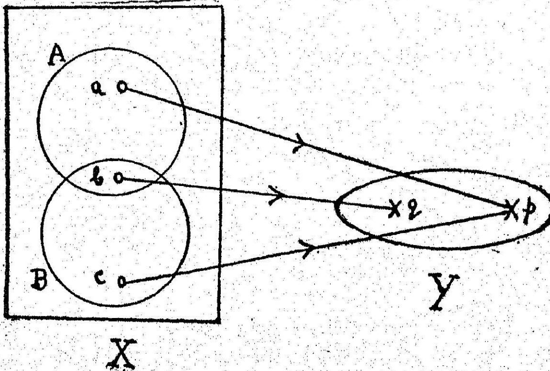
அதாவது $f(a) = y$ என்னும்படியாக $a \in A$ என்ற மூலகமோ அல்லது $f(b) = y$ என்னும்படியாக $b \in B$ என்ற மூலகமோ உள்ளது.

∴ $a$ அல்லது $b$ என்ற மூலகம் $A \cup B$–இல் $f(a) = y$, $f(b) = y$ என்னும்படியாக உள்ளது. அதாவது $y$ ஐப் பிம்பமாக உடைய மூலகம் ஒன்று $A \cup B$-ல் உள்ளது. அதாவது $y \in f(A \cup B)$

$$\therefore \; f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

**6·18.** குணம் : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$




படம் 12

இதைப் பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் நிறுவலாம்.

$$X = \{a, b, c\}$$
$$Y = \{p, q\}$$
$$A = \{a, b\}$$
$B = \{b, c\}$ என்க.

$f: X \longrightarrow Y$ என்னும் சார்பை $f(a)=p$, $f(b)=q$, $f(c)=p$ என்று வரையறுக்க.

$$A \cap B = \{b\}$$
$$f(A \cap B) = \{f(b)\} = \{q\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$
$$f(A) = \{p, q\}$$
$$f(B) = \{p, q\}$$
$$\therefore \; f(A) \cap f(B) = \{p, q\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ என்பது விளங்கும்.

($f: X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பு என்க.) இப்பொழுது $y \in Y$ என்ற எந்த மூலகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் $f(x)=y$ என்னும்படியாக $x$ என்ற மூலகத்தை நாம் X–ல் கண்டு பிடிக்கலாம். [$f$ முழுச்சார்பாக இருப்பதால்.] X-ல் உள்ள இரண்டு வெவ்வேறான மூலகங்கள் $f(x)=y$ என்னும் விதிக்குள் வருவதில்லை. [$f$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக இருப்பதால்.] அதாவது Y-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் X-ல் உள்ள ஒரே ஒரு மூலகத்தை நியமிக்கும் வழி இருப்பதைப் பார்க்கிறோம். இது $f$-ன் எதிர்மறைச் சார்பு (inverse function, inverse mapping) எனப்படும். இதனை $f^{-1}$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம். $f$ என்ற சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பாக இருப்பதால் Y–ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $f^{-1}$ ஆல் பிம்பம் கிடைப்பதோடு ஒரே ஒரு பிம்பம் கிடைக்கிறது. எனவே $f^{-1}$என்பதுவும் சார்பாகிறது. இதையே பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

**6·19. வரையறை :** $f: X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பு என்க. $f(x)=y$ என்றால் $f^{-1}(y) = x$ என்று வரையறுக்கப்படும் $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ என்னும் சார்பு $f$-ன் எதிர்மறைச் சார்பு (inverse function) எனப்படும்.

**6·20. தேற்றம் :** X, Y ஆகிய இரண்டும் மூலகத்தை உடைய கணங்கள் என்க. $f: X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்க. இப்போது $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ என்பதுவும் ஒன்றுக் கொன்றான முழுச்சார்பாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

X என்பது $f^{-1}$-ன் உப அரங்கமாகிய X-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்று எடுத்துக் கொள்க. $x \in X$ என்பதால் $f(x) = y$ என்ற மூலகம் Y-ல் உள்ளது. அதாவது Y-ல் உள்ள $y$ என்ற மூலகத்திற்கு $f^{-1}(y) = x$. அதாவது X-ல் உள்ள எந்த ஒரு மூலகம் $x$-க்கும் $f^{-1}$-ன் கீழ் மூல பிம்பம் (Pre-image) உள்ளது. எனவே $f^{-1}$ முழுச் சார்பாகும். ... ... ... ... ... ... (1)

மேலும் $y_1$, $y_2$ ஆகியவை $y_1 \neq y_2$ என்னும்படியாக Y-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க

$y_1$, $y_2$ ஆகியவை Y-ல் இருப்பதாலும், $f : X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பாக இருப்பதாலும், $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ என்னும்படியாக $x_1$, $x_2$ என்ற இரண்டு வித்தியாசமான மூலகங்கள் X-ல் இருக்கும்.

அதாவது $x_1 = f^{-1}(y_1)$

$x_2 = f^{-1}(y_2)$ & $x_1 \neq x_2$

$\therefore f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$

இவ்வாறு $y_1 \neq y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$

எனவே $f^{-1} : X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும் ... ... ... ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து தேற்றம் நிரூபிக்கப் பட்டது.

$f : X \rightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்க. எனவே, தேற்றத்தின்படி $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ என்பதுவும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பாகும். எனவே, அதே தேற்றத்தின்படி $(f^{-1})^{-1} : X \rightarrow Y$ என்பதுவும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். இந்த $(f^{-1})^{-1}$ என்னும் சார்புக்கும் $f$-க்கும் உள்ள தொடர்பைப் பின்வரும் தேற்றம் விளக்கும்.

**6·21.** தேற்றம்: $f : X \longrightarrow Y$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்றால், $(f^{-1})^{-1} = f$.

நிரூபணம் : $f$ என்பது X இலிருந்து Y க்கு வரையறுக்கப் பட்டது.

$\therefore f^{-1}$ என்பது Yஇலிருந்து X க்கு வரையறுக்கப்பட்ட தாகும்.

$\therefore (f^{-1})^{-1}$ என்பது X இலிருந்துYக்குவரையறுக்கப்பட்ட தாகும்.

அதாவது $f$, $(f^{-1})^{-1}$ ஆகியவற்றின் அரங்கம், உப அரங்கம் ஆகியவை ஒன்றுயிருக்கின்றன.

இப்போது $x_1 \in X$ என்றும், $f(x_1) = y_1$ என்றும் கொள்க (1)

$\therefore \ f^{-1}(y_1)=x_1 \Longrightarrow (f^{-1})^{-1}(x_1)=y_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(1),(2) ஆகியவற்றிலிருந்து$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x) \ \forall x \in X$என்பது விளங்கும். அதாவது $f$, $(f^{-1})^{-1}$ ஆகியவற்றின் கீழ் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பிம்பமும் ஒன்றுயிருக்கின்றன. எனவே, $(f^{-1})^{-1}=f$.

ஒன்றுக்கொன்ருன சார்பை injective mapping அல்லது injection என்றும், முழுச்சார்பை surjective mapping அல்லது surjection என்றும், ஒன்றுக்கொன்ருன முழுச்சார்பை bijective mapping, bijective function அல்லது bijection என்றும் சொல்வதுண்டு.

சார்புகளை இணைத்தல் (Composition of functions)

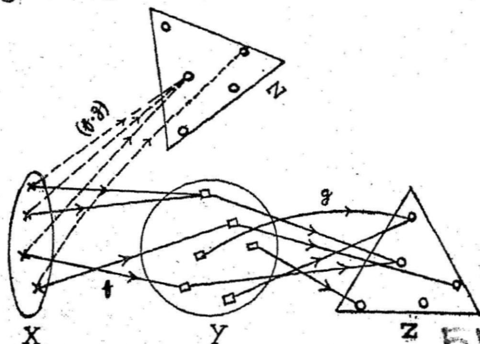
$X$, $Y$, $Z$ என்பன மூலகத்தையுடைய ஏவையேனும் மூன்று கணங்கள் என்க. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ என்பன சார்புகள் என்க. இப்போது $(f.g)$ என்ற நியமனத்தை Xஇலிருந்து Z க்கு

$$x\,(f.g) = ((x)f)\,g$$

என்று வரையறுக்கலாம். இப்போது $f.g$ ஒரு சார்பு என்பதைப் பின்வருமாறு நிருபிக்கலாம்.

$x$ என்பது X-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்ருல் $(x)f$ என்று ஒரே ஒரு மூலகம் Y-ல் உள்ளது. $(x)f \in Y$; அத்துடன். $g$ என்பது Yஇலிருந்து Zக்கு வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு சார்பு. எனவே $((x)f)g$ என்று ஒரே ஒரு மூலகம் Z-ல் உள்ளது. அதாவது X-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் $x$-க்கும $((x)f)g$ என்று ஒரே ஒரு மூலகம் Z-ல் உள்ளது. $(x)(f\cdot g)=((x)f)g$ என்று வரையறுத்திருப்

பதால் $(f \cdot g)$ என்பது X இலிருந்து Z க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு என்பது விளங்கும்.






படம் 13

குறிப்பு : சார்புகளை நாம் பல விதத்தில் இணைக்கலாம். இங்கு நாம் மூலகத்தை முதலிலும், சார்பை அதன் பின்னும் (வலப் புறத்திலும்) எழுதும் முறையை அடிப்படையாகக்கொண்டு முதலில் பலன் வரவேண்டிய சார்பை இடப் புறத்திலும் இரண்டாவது பலன் வரவேண்டிய சார்பை அதன் வலப் புறத்திலும் எழுது கிறோம். வேறு விதமாக $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ என்றால் $(g \cdot f)$ என்ற சார்பை $(g \cdot f)x = g(f(x))$ என்று வரையறுப்பாரும் உளர். குறிப்பாக உப அரங்கத்தில் உள்ள மூலகங்களுக்கிடையில் செயலிகள் வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் சார்புகளுக்கிடையிலும் பல செயலிகளை வரையறுக்க முடியும்.

**6·22.** தேற்றம் : $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ ஆகிய இரண்டும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்புகள் (bijections) என்றால் $(f \cdot g): X \longrightarrow Z$ என்பதுவும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பாகும்.

நிரூபணம் : $z_1$ என்பது Z-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $g: Y \longrightarrow Z$ முழுச் சார்பானதால் $(y_1)g = z_1$, என்னும் படியாக $y_1$ என்ற மூலகம் Y-ல் உள்ளது.

இப்போது $y_1 \in Y$ & $f: X \longrightarrow Y$ என்பதுமுழுச்சார்பு.

$\therefore$ $(x_1)f = y_1$ என்னும்படியாக $x_1 \in X$

$\therefore$ $((x_1)f)g = z_1$ ; ஆனால் வரையறைப்படி $((x_1)fg) = (x_1)(f \cdot g)$.

இவ்வாறு Z-ல் உள்ள $z_1$ என்ற எந்த மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் $(x_1)(f \cdot g) = z_1$ என்னும்படியாக $x_1$ என்ற மூலகம் X-ல் உள்ளது.

எனவே $(f \cdot g)$. $X \longrightarrow Z$ ஒரு முழுச் சார்பாகும். ... (.)

மேலும் $x_1$, $x_2$ என்பவை X-ன் மூலகங்களாக இருக்கும் போது

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow (x_1)f \neq (x_2)f$ ($f$ ஒன்றுக்கொன்றுனது)

$(x_1)f \neq (x_2)f \Longrightarrow ((x_1)f)g$

$\neq ((x_2)f)g$ ($g$ ஒன்றுக் கொன்றுனது)

அதாவது $(x_1)(f.g) \neq (x_2)(f.g)$

இவ்வாறு $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow (x_1)(f.g) \neq (x_2)(f.g)$

எனவே $(f.g)$ ஒன்றுக் கொன்றுன சார்பாகும். ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**6·23. தேற்றம் :** $f: X \longrightarrow Y$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சார்பு என்க. $I_x$, $I_y$ என்பவை $x$, $y$ ஆகிய கணங்களில் வரையறுக்கப் பட்டுள்ள அலகுச் சார்புகள் என்க. இப்போது $(I_x \cdot f) = f = (f \cdot I_y)$.

[இதை நிரூபித்துக் கொள்ளவும்.]

**6·24. தேற்றம் :** $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$, $h: Z \longrightarrow T$ என்றால் $f.(g.h) = (f.g)h$. [இதை நிரூபித்துக் கொள்ளவும்.]

**பயிற்சி**

1. பின்னர் கொடுத்துள்ள நியமனங்களில் எவை எவை சார்புகள் என்பதைக் காண்க. சார்பாக இருப்பவைகள் 1—1, முழுச் சார்பு ஆகிய குணங்களை உடையனவா என்பதையும் காண்க.

| எண் | அரங்கம் | உப அரங்கம் | நியமனம் |
|---|---|---|---|
| 1. | Z | Z | $f(x) = x^2$ |
| 2. | Z | Z | $f(x) = x^3$ |
| 3. | Z | Z | $f(x) = \sqrt{x}$ |
| 4. | வகுப்பிலுள்ள மாணவர்கள் | R (மெய் எண்கள்) | $x$-ன் எடை '$y$' kgs. என்றால், $f(x) = y$. |
| 5. | கல்லூரி நூல் நிலையத்திலுள்ள புத்தகங்கள் | கல்லூரி மாணவர்கள் | $x$ என்ற புத்தகத்தை $y$ பார்த்திருந்தால் $f(x) = y$. |
| 6. | சமதளத்திலுள்ள வட்டங்கள் | R | "$x$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம் $y$" என்றால் $f(x) = y$. |

2. பின்னர் கொடுத்திருப்பவைகளிலிருந்து கீழே கொடுத்திருக்கும் அட்டவணையை நிரப்புக.

| எண் | அரங்கம் | உப அரங்கம் | நியமனம் |
|---|---|---|---|
| 1. | Z | Z | $f(x)=1$ |
| 2. | ,, | ,, | $f(x)=x/2$ |
| 3. | ,, | ,, | $f(x)=5x$ |
| 4. | ,, | ,, | $f(x)=\mathrm{k}x$ (k என்பது குறிப்பிட்ட ஒரு முழு எண்). |
| 5. | $\{a, b\}$ | $\{a, b, c\}$ | $f(a)=a; f(b)=b$ |
| 6. | $\{3\}$ | { Rama, Gopal } | $f(3)=$ Rama. |
| 7. | { Sam } | { Heaven, Hell } | $f($Sam$)=$Hell |
| 8. | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் | R (மெய் எண்கள்) | $f((a, b),=a$ |
| 9. | ,, | ,, | $f((a, b))=b.$ |
| 10. | ,, | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள நேர் கோடுகள் | $f((a,b))=(a,b)$ என்ற புள்ளியின் வழியே செல்லும் நேர் கோடு. |
| 11. | ,, | யுக்ளீடியன் சமதளத்தில் 2 என்ற சாய்வை (Slope) உடைய நேர் கோடுகள் | ,, |
| 12. | ,, | யுக்ளீடியன் சமதளத்தில் உள்ள வட்டங்கள் | $f[(a, b)]=(a,b)$ வழியாகச் செல்லும் வட்டம் |
| 13. | ,, | $(o, o)$ ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் | ,, |

(தொடர்ச்சி)

| எண் | அரங்கம் | உப அரங்கம் | நியமனம் |
|---|---|---|---|
| 14. | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் | $(o, o)$ என்ற புள்ளி | $f(a, b)=(o, o)$ |
| 15. | யுக்ளீடியன் சமதளத்தில் உள்ள வட்டங்கள் | யுக்ளீடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் | $f(x)=x$ என்ற வட்டத்தின் மையம் |
| 16. | யுக்ளீடியன் சமதளத்தில் உள்ள முக்கோணங்கள் | யுக்ளீடியன் சமதளத்தில் உள்ள வட்டங்கள் | $f(x) = x$ என்ற முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் (Circum circle) |
| 17. | ,, | ,, | $f(x)$ $x$ என்ற முக்கோணத்தின் உள் வட்டம் (In circle) |

| வரையறைகள் | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ...... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| சார்பு | | | | | | | | | | | | | | |
| முழுச் சார்பு | | | | | | | | | | | | | | |
| 1—1 சார்பு | | | | | | | | | | | | | | |

குறிப்பு: மேலே குறிப்பிட்டவைகளில் 8, 9 ஆகியவற்றை முறையே $x$ அச்சு, $y$ அச்சுக்களின் மேல் வீழல் (Projection mapping on the $x$ and $y$ axes) என்பர்.

3. (a) ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பு

(b) ஒன்றுக்கொன்று அல்லாத முழுச்சார்பு

(c) ஒன்றுக் கொன்றான உட்சார்பு

(d) ஒன்றுக்கொன்று அல்லாத உட்சார்பு, ஆகிய வற்றிற்கு மேற்கோள் கொடுக்கவும்.

4. $f: X \longrightarrow Y$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சார்பு என்க. A என்பது X-ன் உட்கணம் என்க. பின்வருவனவற்றைச் சரி அல்லது தவறு என்று நிரூபிக்க.

(i) $f(\phi) = \phi$

(ii) $f(X) = Y$

(iii) $f(A') = (f(A))'$

(iv) $A = f^{-1}(f(A))$

5. $f : X \longrightarrow Y$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சார்பு என்க. A, B ஆகியவை Y-ன் உட்கணங்கள் என்க. பின்வருவனவற்றைச் சரி அல்லது தவறு என்று நிரூபிக்க.

(i) $f^{-1}(\phi) = \phi$

(ii) $f^{-1}(Y) = X$

(iii) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

(iv) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

(v) $f^{-1}(A') = [f^{-1}(A)]'$

(vi) $A \neq \phi \implies f^{-1}(A) \neq \phi$

6. $X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$

Z = R (மெய் எண்கள்) என்று எடுத்துக் கொள்க.

$f : X \longrightarrow Y$ என்பதை $f(x) = 2x$ என்று வரையறுக்க.

$g : Y \longrightarrow Z$ என்பதை $g(x) = \frac{x}{3}$ என்று வரையறுக்க.

$(f.g) : X \longrightarrow Z$ என்ற சார்பின் கீழ் X–ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பிம்பத்தையும் காண்க. [$f$, $g$ ஆகியவற்றிற்கு வடிவம் கொடுத்திருப்பதைப்போல் $(f.g)$க்கும் வடிவம் கொடுக்கவும். $f(x)$, $(x)f$ என்பவை ஒரே பொருளைக் குறிக்கும் இரு குறியீடுகள் (symbols) என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.]

7. X = யுக்ளிடியன் சமதளத்திலுள்ள புள்ளிகள் ($R^2$)

Y = யுக்ளிடியன் சமதளத்தில் $(o, o)$ஐ மையமாகக் கொண்ட வட்டங்கள்.

Z = R (மெய் எண்கள்)

$f : X \longrightarrow Y$ என்பதை $f((a, b)) = (a, b)$ என்னும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் வட்டம் என்று வரையறுக்க.

$g : Y \longrightarrow Z$ என்பதை $g(x) = x$ என்ற வட்டத்தின் ஆரம் என்று வரையறுக்க. இப்போது $(f.g) : X \longrightarrow Z$-ன் வரையறையைக் காண்க.

8. $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ ஆகிய இரண்டும் ஒன்றுக் கொன்றான சார்புகள் என்றால் $(f.g)$-ம் ஒன்றுக் கொன்றான சார்பு என்று நிரூபிக்க.

9. $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ ஆகிய இரண்டும் முழுச்சார்புகள் என்றால் $(f.g)$-ம் முழுச்சார்பு என்று நிரூபிக்க.

10. தேற்றம் 6·22 ஐப் பயிற்சிகள் 8, 9 ஆகியவற்றிலிருந்து நிரூபிக்க.

11. R, S, T என்பவை மூலகத்தையுடைய கணங்கள் என்றால்,

(i) $R \times S$ இலிருந்து $S \times R$க்கு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு (bijection) ஒன்றை வரையறுக்க முடியும் என்று நிரூபிக்க.

(ii) $(R \times S) \times T$ இலிருந்து $R \times (S \times T)$க்கு ஒன்றுக் கொன்றான முழுச்சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியும் என்று நிரூபிக்க.

12. S என்ற கணத்தில் முடியும் அளவு (finite number) மூலகங்களே உள்ளன என்றால் (i) $f : S \xrightarrow{\text{முழு}} S \Longrightarrow f$ ஒன்றுக் கொன்றான சார்பு.

(ii) $f : S \xrightarrow{1-1} S \Longrightarrow$ முழுச் சார்பு என்பனவற்றை நிரூபிக்க.

(iii) S என்ற கணத்தில் முடியா அளவு மூலகங்கள் இருந்தால் (i), (ii) ஆகிய இரண்டுமே தவறு என்பதை எடுத்துக் காட்டு மூலம் நிறுவுக.

13. பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $f.g$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு $\not\Longrightarrow f, g$ ஆகிய இரண்டும் தனித்தனியே ஒன்றுக்கொன்றான சார்புகள்.

(ii) $f.g$ முழுச்சார்பு $\not\Longrightarrow f, g$ ஆகிய இரண்டும் தனித் தனியே முழுச்சார்புகள்.

14. $f : X \longrightarrow Y$ ஒரு சார்பு என்றும், $A \subset X$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க. $f_A : A \longrightarrow Y$ என்னும் சார்பை $f_A(x) = f(x)$ என்று வரையறை செய்தால் $f_A$ என்பது A யோடு நிறுத்திய $f$ (restriction

of $f$ to A) எனப்படும். பின்வரும் கூற்றுகளை நிறுவுக.

(i) $f$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு என்றால் $f_A$-ம் ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

(ii) $f$ ஒன்றுக்கொன்றாக இல்லாவிட்டாலும் $f_A$ ஒன்றுக்கொன்றாக இருக்கலாம்.

15. $f: S \longrightarrow T$, $g: T \longrightarrow V$ என்பவை எவையேனும் இரு சார்புகள் என்க. $A \subseteq S \cap T$ என்றும் $f(A) \subseteq A$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால் $(f.g)_A = f_A . g_A$ என்று காட்டுக.

16. $X = R - \{0, 1\}$ என்க. X இலிருந்து X-க்கு $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$, $f_6$ ஆகிய சார்புகளை

$$(x)f_1 = x \qquad (x)f_4 = \frac{1}{1-x}$$

$$(x)f_2 = \frac{1}{x} \qquad (x)f_5 = \frac{x-1}{x}$$

$$(x)f_3 = 1-x \qquad ( )f_6 = \frac{x}{x-1}$$

என்று வரையறுத்தால் பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்புக.

| | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | | | | | |
| $f_2$ | | | | | | |
| $f_3$ | | | | | $f_6$ | |
| $f_4$ | | | | | | |
| $f_5$ | | | | | | |
| $f_6$ | | | | | | |

எடுத்துக்காட்டாக $(f_3 \cdot f_5)$ஐக் காண்போம்.

$$x\,(f_3 \cdot f_5) = \{(x)f_3\}f_5 = (1-x)f_5 = \frac{(1-x)-1}{1-x}$$

$$= \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore\ x(f_3 \cdot f_5) = \frac{x}{x-1}$$

ஆனால், $(x)f_6 = \dfrac{x}{x-1}$; $\therefore\ f_3 \cdot f_5 = f_6$.

17. ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்புகளுக்கு $f^{-1}$ வரையறுத்துள்ளோம். இதே $f^{-1}$-ஐ ஒன்றுக்கொன்று அல்லாத சார்புக்கு வரையறுத்தால் $f^{-1}$ சார்பாக இருக்குமா? ஏன்? $f^{-1}$-ஐ முழுச் சார்பாக அல்லாத சார்புக்கு வரையறுத்தால் $f^{-1}$ சார்பாக இருக்குமா? ஏன்?

# 7. இயல் எண்கள்

## (Cardinal numbers)

முன்னே விவரித்த பிரிவுகளில் சில இடங்களில் 'மூலகத்தை யுடைய கணம்'' போன்ற வாக்கியங்களையும், "X-ல் $n$ மூலகங்கள் இருந்தால் P (X)-ல் $2^n$ மூலகங்கள் இருக்கும்'' என்பன போன்ற குணங்களையும் குறிப்பிட்டுள்ளோம். ஆனால் பொதுவாகக் கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் தன்மையைப் பற்றியோ அல்லது கணத்தில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளன என்பதைப் பற்றியோ ஆராயவில்லை. இப்போதும் நாம் கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் தன்மையைப் பற்றிக் கருதாமல் கணத்தில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளன என்ற அளவை முறையைப் பார்ப்போம். கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் என்று கூறும்போது ஒரே மூலகத்தை ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட இடத்தில் குறிப்பிடுவதில்லை என்பதை மனதில் கொள்ளவேண்டும்.

7·1. வரையறை: A,B ஆகியவை மூலகத்தையுடைய எவையேனும் இரு கணங்கள் என்க. A இலிருந்து B க்கு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமானால் A,B ஆகிய இரண்டு கணங்களும் அளவையில் சமமானவை (numerically equivalent) எனப்படும்.

இரண்டு கணங்கள் அளவையில் சமமானவை என்று நிரூபிப்பதற்கு நாம் சில குறுக்கு வழிகளைக் கடைப்பிடிக்கலாம். அவற்றைப் பின்வரும் தேற்றம் விளக்கும்.

7·2. தேற்றம்: ஸ்க்ரோடார் – பெர்ன்ஸ்டீன் தேற்றம் (Schnoeder-Bernstein Theorem)

X;Y என்பன இரு கணங்கள் என்க. X என்பது Y-ன் உட்கணம் ஒன்றுடன் அளவையில் சமமாகவும், Y என்பது X-ன் உட்கணம் ஒன்றுடன் அளவையில் சமமாகவும் இருந்தால் X என்பது Y உடன் அளவையில் சமமாக இருக்கும்.

[நிரூபணம் நாம் கொடுக்கப்போவதில்லை.]

A,B ஆகிய கணங்கள் அளவையில் சமமானவை என்பதை $A \sim B$ என்று குறிப்பிட்டால் '$\sim$' என்பது கணங்களுக்குள் ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாக (equivalence relation) இருக்கும். இதை ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்பின் குணங்களிலிருந்து இலகுவில் நிரூபித்துவிடலாம். (நிரூபி.) எனவே மேலோட்டமாகச் சொன்னுல் அளவையில் சமமாயிருத்தல் என்னும் தொடர்பை உபயோகித்து, கணங்களைச் சரிநிகர் இனங்களாக (equivalence class)ப் பிரித்து விடலாம் மேலும் ஒவ்வொரு சரிநிகர் இனத்திலும் உள்ள கணங்கள் அனைத்தும் ஒரே அளவு மூலகங்களைக் கொண்டுள்ளன எனலாம்.

**முடியும் கணங்கள் (finite sets) :**

இயல் எண்களைப் பற்றிப் படிக்குங்கால்,

$$N_1 = \{1\}$$
$$N_2 = \{1, 2\}$$
$$N_3 = \{1, 2, 3\}$$
$$\vdots$$
$$N_n = \{1, 2, 3, \ldots n\}$$
$$\vdots$$

என்னும் இயற்கை எண்களால் (Natural numbers) ஆன கணங்கள் நமக்கு மிகவும் பயன்படும்.

**7·3. வரையறை:** X என்பது மூலகத்தொகையுடைய ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. $i$-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு X இலிருந்து $N_i$க்கு ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமாஞல் X என்பது **முடியும் கணம்** (finite set) எனப்படும்.

வரையறைதான் இவ்வாறு இருக்கிறதே தவிர உண்மையில் முடியும் அளவு (finite number) மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் முடியும் கணம் ஆகும்.

ஒவ்வொரு மனிதனுக்கும் ஓர் எடை இருப்பதுபோல் ஒவ்வொரு கணத்திற்கும் ஓர் இயல் எண் உண்டு. அது அக் கணத்தில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளன என்பதைக் குறிப்பிடும் அளவை எண் ஆகும். X என்ற கணத்தின் இயல் எண்ணை $|X|$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

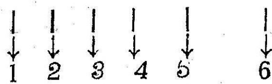
**7·4. வரையறை:** X என்பது முடியும் கணம் என்றுல், $i$-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு $f: X \longrightarrow N_i$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்பை வரையறுக்க முடியும். $i$-ன் இந்த மதிப்பு X என்ற கணத்தின் இயல் எண் (Cardinal number) அல்லது X என்ற கணத்தின் அளவை (Cardinality of X) எனப்படும்.

7·5. **எ.கா.** $X = \{a, b, c, d\}$ என்க.

$|X| = 4$. ஏனெனில் $f: X \longrightarrow N_4$ என்னும் ஒன்றுக் கொன்றுன முழுச்சார்பை $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, f(d) = 4$ என்று வரையறுக்கலாம்.

**7·6.** எ.கா. $X=\{a, p, 2, 7, \{a\}, \{2, 7\}\}$ என்க.

$|X|=6$. ஏனெனில், $a \quad p \quad 2 \quad 7 \quad \{a\} \quad \{2, 7\}$



$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$ என்று $f: X \rightarrow N_6$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்முன முழுச் சார்பை வரையறுக்கலாம்.

(ஒவ்வொரு மூலகத்தில் பிம்பமும் அதன் கீழ் எழுதப்பட்டுள்ளது.)

**குறிப்பு:** மேற்கூறியவற்றிலிருந்து இயற்கை எண்களே முடியும் கணங்களின் இயல் எண்களாக உள்ளன என்பது விளங்கும். இவ்வாறே இயற்கை எண்கள் முடியும் இயல் எண்களாகும். (Natural numbers are finite cardinal numbers).

**7·7.** தேற்றம்: இரண்டு முடியும் கணங்கள் அளவையில் சமமானவையாக இருந்தால் அவற்றின் இயல் எண்களும் சமமாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** இது பார்ப்பதற்கு வெளிப்படையாகத் தோன்றுகிறது. இதை "அளவையில் சமமாயிருத்தல்", "இயல் எண்" ஆகியவற்றின் வரையறையை உபயோகித்து முறையாக நிரூபிக்க.

**எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணங்கள்**
(Countably infinite sets)

**7·8.** வரையறை: மூலகத்தை உடைய கணம் ஒன்று முடியும் கணமாக இல்லாவிட்டால் அது **முடியாக் கணம்** (infinite set) எனப்படும்.

**7·9.** எ.கா.: ($a$) N என்னும் இயற்கை எண்களின் கணம் முடியாக் கணமாகும்.

($b$) Z என்னும் முழு எண்களின் கணம் முடியாக் கணமாகும்.

**7·10.** வரையறை: X என்பது மூலகத்தையுடைய ஒரு கணம் என்க. X இலிருந்து N என்னும் இயற்கை எண்களின் கணத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்முன முழுச்சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமானல் X என்பது **எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணம்** (Countably infinite set) எனப்படும்.

வரையறையை வேறுவிதமாக "N இலிருந்து X என்னும் கணத்திற்கு ஒன்றுக்கொன்முன முழுச் சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமானல் X என்பது எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணம் எனப்படும்" என்றும் கூறலாம்.

வரையறையிலிருந்து, எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணங்கள் அனைத்தும் N என்ற இயற்கை எண்களின் கணத்துடன் அளவையில் சமமானவை என்பது விளங்கும்.

**7·11. எ.கா. :** $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ என்னும் கணமும் N-ம் அளவையில் சமமானவை.

ஏனெனில்

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 \ldots \end{array}$$

அதாவது $x \longrightarrow 2x$ என்னும் சார்பு N இலிருந்து $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ என்னும் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பாகும்.

குறிப்பு : இங்கு $\{2, 4, 6 \ldots\}$ என்பது N·ன் முறையான உட்கணமாக இருப்பதால் இதில் குறைவான மூலகங்கள் இருப்பது போல் தோன்றுகிறது. ஆனல் நம் வரையறையைப் பொறுத்த வரை இவை இரண்டும் அளவையில் சமமானவையாகும். எனவே முடியாக் கணங்களைப் பொறுத்த வரையில் நிலைமைகள் நாம் நினைப்பதுபோல் இல்லை.

**7·12. எ.கா. :** இரட்டை முழு எண்களின் கணமானது எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணமாகும். ஏனெனில்

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -4 & 6 \ldots \end{array}$$

என்பது N இலிருந்து இரட்டை முழு எண்களின் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பு ஆகும். (முழுச் சார்பு : ஏனெனில் இரண்டாவது கிடை வரிசையை நோக்குங்கால் ஒவ்வோர் இரட்டை எண்ணும் ஒரு முறை வந்தாக வேண்டும்.)

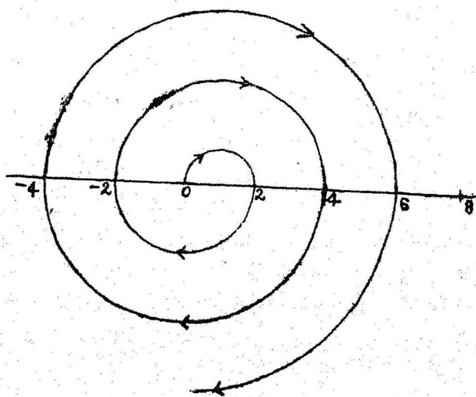
**7·13. எ.கா. :** $\{7, 14, 21, 28 \ldots\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க. $x \rightarrow 7x$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பை (Bijection) N இலிருந்து இக்கணத்திற்கு வரையறுக்க முடிவதால் இக்கணம் எண்ணத்துக்குட்பட்ட முடியாக் கணமாகும்.

**7·14. எ.கா. :** $S = \left\{ x \;/\; \begin{array}{l} x \in z \\ x \text{ ஒரு முழு வர்க்கம் (Perfect square)} \end{array} \right\}$

என்ற கணத்தில் N என்ற கணத்தைவிட எத்தனையோ மூலகங்கள் குறைவாக உள்ளன. ஆயினும் $n \rightarrow n^2$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்பை N இலிருந்து S-க்கு வரையறுக்க முடிவதால் S என்பது N உடன் அளவையில் சமமாக இருக்கிறது.

மேற் குறிப்பிட்டவற்றிலிருந்து ஒரு முடியாக் கணத்தின் மூலகங்கள் அனைத்தையும், முதல் மூலகம், இரண்டாவது மூலகம், மூன்றாவது மூலகம்,... என்று வரிசைப்படுத்த முடிந்தால் அது எண்ணத்திற்குட்பட்ட முடியாக்கணமாக இருக்கும் என்பது தெளிவாகும். உண்மையில் வரிசைப்படுத்தல் என்பது N உடன் ஒன்றுக்கொன்றான தொடர்பை ஏற்படுத்துதல் ஆகும்.

எ. கா. 7-12-ல் நாம் இரட்டை எண்களை ஒரு கிடை அச்சில் பதிக்கலாம். பின்னர் '0' (zero, பூச்சியம்)இலிருந்து புறப்பட்டு, படத்தில் கொடுத்திருப்பது போன்ற ஒரு சுருளின் (spiral) வழியாகச் செல்லும்போது எதிர்ப்படும் மூலகங்களை முறையே முதல்



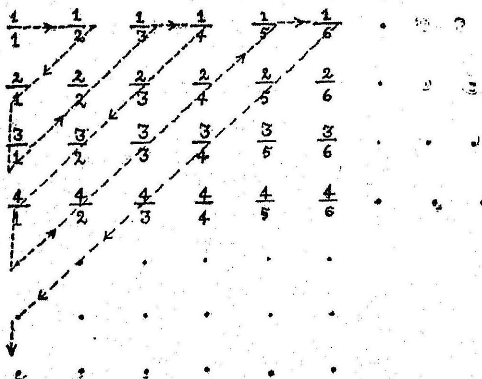

படம் 14

மூலகம், இரண்டாம் மூலகம்...என்று வரிசைப்படுத்திச் செல்லலாம். இதையே நாம் எ. கா. 7·12-ல் வேறு விதமாகக் கொடுத்துள்ளோம். பொதுவாகப் படத்தின் மூலம் வரிசைப்படுத்துதல் இலகுவாக இருக்கும்.

**7·15 எ. கா.** : *நேர்த்திசை விகிதமுறு எண்கள் (positive rationals) N உடன் அளவையில் சமமாக இருக்கும்.*

இதை வரை படத்தின் மூலம் நிரூபிக்கலாம். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கணத்தை நாம் பிரித்து, பல கிடை வரிசைகளாக எழுதப்போகிறோம். முதல் கிடை வரிசையில் தொகுதி (Numerator)

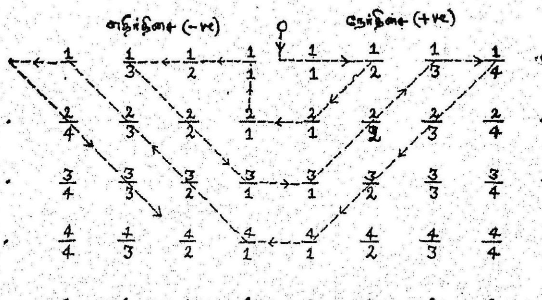
யில் 1 உள்ள எண்களை வரிசைப்படுத்தி எழுதுகிறோம். இரண்டாவது கிடை வரிசையில் 2 என்ற எண்ணைத் தொகுதியில் உள்ள எண்களை வரிசைப்படுத்தி எழுதுகிறோம். இவ்வாறாக நேர்த் திசை விகிதமுறு எண்களை,



படம் 15

என்று எழுதலாம். பின்னர் $\frac{1}{1}$ என்ற எண்ணிலிருந்து புறப்பட்டு வரைந்திருக்கும் கோட்டின் வழியே செல்லும்போது எதிர்ப்படும் மூலகங்களை முதல் மூலகம், இரண்டாவது மூலகம்,.........என்று வரிசையிடலாம். முன்னரே வந்துவிட்ட எண் மறுபடியும் வந்தால் அதை நீக்கிவிடலாம். இம் முறைக்கு கேன்ட்ரின் மூலைவிட்டப்படுத்தும் முறை (Cantor's diagonalisation process) என்பது பெயர்.

**7·16. எ.கா.:** விகிதமுறு எண்களின் கணம் (Q என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும்.) N உடன் அளவில் சமமானது என்பதை





படம் 16

Q-ன் மூலகங்களைப் படத்தில் கொடுத்திருப்பதுபோல் வரிசைப் படுத்தி எழுதி 'O' இலிருந்து புறப்பட்டு வரைந்திருக்கும் கோட்டின் உதவியால் நிரூபிக்கலாம்.

எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணங்கள் அனைத்தும் அளவையில் சமமானவை என்பது நமக்குத் தெரிந்ததே. இக் கணங்களின் இயல் எண் என்ன என்பதைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

**7·17.** வரையறை : எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக்கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை $\aleph_0$ ($\aleph$ என்பது first letter of the Hebrew Alphabet; read as 'aleph') என்று சொல்கிறோம். அதாவது எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணத்தின் இயல் எண்ணை $\aleph_0$ என்று குறிப்பிடுகின்றோம்.

**7·18.** எ. கா. : (i) $|N| = \aleph_0$

(ii) $|Q| = \aleph_0$

(iii) $|2\mathbb{Z}| = |m\mathbb{Z}| = \aleph_0$

$(m\mathbb{Z} = \{mx / x \in z\})$

குறிப்பு : இரு கணங்கள் அளவையில் சமமானவையாக இருந்தால் அவைகளின் இயல் எண்கள் சமமானவை என்பது இங்கும் உண்மையாக உளது.

இதுவரை நாம் வரையறுத்துள்ள இயல் எண்கள் $1, 2, 3, \ldots, \aleph_0$ ஆகும். இவற்றிற்கிடையில் "$m$ ஐ விடப் பெரியது $n$" ($m < n$ என்று குறிப்பிடும்படியாக) என்னும் ஒரு தொடர்பைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

**7·19.** வரையறை : X, Y என்ற மூலகத்தையுடைய கணங்களுக்கு முறையே $m$, $n$ என்பவை இயல் எண்கள் என்க.

(i) X இலிருந்து Yக்கு ஒன்றுக்கொன்றான உட்சார்பு ஒன்று உள்ளது;

(ii) X இலிருந்து Yக்கு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு இல்லை என்னும் இரு விதிகளும் உண்மையாக இருந்தால் $m$ ஐ விடப் பெரியது $n$ என்கிறோம். இதை $m < n$ என்று எழுதுகின்றோம்.

மேற்கூறிய வரையறையிலிருந்து

$1 < 2 < 3 < \ldots\ldots < \aleph_0$ என்பது விளங்கும்.

**7·20.** வரையறை : மூலகத்தையுடைய ஒரு கணத்தில் இயல் எண்ணானது இயற்கை எண்ணாகவோ (Natural number) அல்லது $\aleph_0$ ஆகவோ இருந்தால் அக்கணம் <u>எண்ணத்திற்குட்பட்ட கணம்</u> (Countable set) எனப்படும்.

குறிப்பு: மேலே நாம் படித்துள்ளவைகளிலிருந்து எண்ணத்துக்குட்பட்ட முடியாக் கணமானது $[a_1, a_2, a_3 \ldots]$ என்னும் வடிவில் இருக்கும் என்பது விளங்கும்.

**எண்ணத்திற்கு உட்படாத கணங்கள் (Uncountable sets)**

ஒரு கணத்தில் முடியும் அளவு மூலகங்கள் மட்டுமே இருந்தால் அக்கணம் எண்ணத்திற்கு உட்பட்டது என்பது தெளிவு. முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்திற்கும் N-க்கும் இடையில் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு ஒன்றை ஏற்படுத்த முடியுமானாலும் அக்கணத்தையும் எண்ணத்திற்கு உட்பட்டது என்றே எடுத்துக்கொண்டோம். ஆனால் முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட பல கணங்களை நாம் N உடன் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பால் இணைக்க முடியாது. அத்தகைய கணங்கள் எண்ணத்திற்கு உட்படாத கணங்கள் (Uncountable sets) அல்லது எண்ணத்திற்கு உட்படாத முடியாக் கணங்கள் (Uncountably infinite sets) எனப்படும். இதையே வரையறையாகப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

**7·21. வரையறை:** முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்தை N உடன் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பால் இணைக்க முடியாது என்றால் அக்கணம் எண்ணத்திற்கு உட்படாத கணம் எனப்படும்.

**7·22. எ. கா.:** மெய் எண்களின் கணமானது எண்ணத்துக்கு உட்படாத கணம் ஆகும்.

**நிரூபணம்:** மெய் எண்களை வரிசைப்படுத்த முடியாது என்று நிரூபிப்பதே நமது பொறுப்பாகும். மெய் எண்கள் அனைத்தையும் வரிசைப்படுத்த முடியுமாயின் $(0,1) = \left\{ x \middle/ \begin{matrix} x \in R \\ 0<x<1 \end{matrix} \right\}$ என்னும் கணத்தில் உள்ள மெய் எண்களையும் முதல் மூலகம், இரண்டாம் மூலகம், என்று வரிசைப்படுத்த முடியும். $(0, 1)$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தையும் $c_1, c_2, \ldots$ என்பவை $0, 1, 2 \ldots 9$ ஆகியவற்றுள் இருக்கும்போது $0 . c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ என்று முடிவில் தசமமாக எழுத முடியும். $(0,1)$ என்பதை N உடன் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பால் இணைக்க முடியுமாயின் $(0,1)$ $\{a_1, a_2 \ldots\}$ என்னும் வடிவில் இருக்கும்.

இப்போது
$$\begin{aligned} a_1 &= 0{\cdot}a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots \\ a_2 &= 0{\cdot}a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots \\ a_3 &= 0{\cdot}a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

இங்கு $a_i \in (0,1)$ $a_{ij} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

இப்போது நாம் $(0,1)$-ல் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் (A)-ல் வரவில்லை என்பதைக் காட்டப்போகின்றோம்.

$$b = 0.\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots \ldots$$

என்னும் எண்ணை $b_i \neq a_{ii}$, $b_i \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு எடுத்துக் கொண்டால்,

$b \neq a_1$ · ஏனெனில் $b_1 \neq a_{11}$, அதாவது முதல் தசமத்தானத்தில் இரண்டு எண்களும் மாறுபடுகின்றன.

$b \neq a_2$. ஏனெனில் $b_2 \neq a_{22}$ ; அதாவது இரண்டாவது தசமத்தானத்தில் இரண்டு எண்களும் மாறுபடுகின்றன.

இதுபோல் $b \neq a_j$ ஏனெனில் $j$ தசமத்தானத்தில் இரண்டு எண்களும் மாறுபடுகின்றன.

அதாவது N-ல் உள்ள ஒவ்வொரு $i$-க்கும் $b \neq a_i$

எனவே $(0, 1)$-ல் உள்ள $b$ என்னும் மூலகம் விடுபட்டிருக்கிறது. அதாவது $(0, 1)$-ன் மூலகங்களை வரிசைப்படுத்த முடியாது. எனவே மெய் எண்களின் கணமான R, எண்ணத்திற்கு உட்படாத கணம் ஆகும்.

**7·23.** எ.கா.: $(a, b) = \left\{ x \middle/ \begin{array}{l} x \in R \\ a < x < b \end{array} \right\}$ என்னும் கணம் R உடன் அளவையில் சமமானது என்று நிரூபிக்கலாம்.

**7·24.** எ.கா.: எ. கா. 7·23-ல் கொடுத்திருப்பது போன்ற எந்த ஒரு திறந்த இடை வெளியையும் (open interval) உட்கணமாகக் கொண்ட R-ன் உட்கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் R உடன் அளவையின் சமமானவை என்று நிரூபிக்கலாம்.

**7·25.** எ.கா.: $R^2 = \{(x,y)/x,\ y \in R\}$ என்னும்கணத்தின் உட்கணமான $S = \left\{ (x,y) \middle| \begin{array}{l} x, y \in R \\ 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1 \end{array} \right\}$ என்னும் கணம் R உடன் அளவையில் சமமானது என்று நிரூபிக்கலாம்.

**7·26.** எ. கா.: R என்னும் கணம் எண்ணத்திற்கு உட்படாதது என்றால் $P(R)$ என்ற அதன் அடுக்குக் கணமும் (power set) எண்ணத்திற்கு உட்படாமல்தான் இருக்கும்.

R உடன் அளவையில் சமமாக இருக்கும் கணங்கள் ஒவ்வொன்றும் எண்ணத்திற்கு உட்படாதது ஆகும். எனவே எண்ணத்திற்கு உட்படாத கணங்களும் பல உள்ளன என்பது தெளிவு.

**7·27.** வரையறை: மெய் எண்களின் கணமான R உடன் அளவையில் சமமான கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை நாம் $c$ [தொடரகத்தின் இயல் எண் (Cardinal number of the continuum) என்று அழைக்கப்படும்.] என்று குறிப்பிடுவோம். எனவே R-உடன் அளவையில் சமமான ஒவ்வொரு கணத்தின் இயல் எண்ணும் $c$ ஆகும்.

இயல் எண்களுக்கிடையின் நாம் முன்னர் வரையறுத்த '<' என்னும் தொடர்பின்படி $1<2<3\ldots<\aleph_0<c$ என்பது விளங்கும். $\aleph_0$, $c$ ஆகிய இயல் எண்களுக்கிடையில் வேறு இயல் எண்கள் 'இல்லை என்றே நம்பப்படுகிறது.' இது (Cantor's Continuum hypothesis) எனப்படும்.

X என்பது மூலகத்தையுடைய ஒரு கணம் என்றால் P(X) என்ற அதன் அடுக்குக் கணத்தில் X ஐக் காட்டிலும் அதிகம் மூலகங்கள் உள்ளன என்பது வெளிப்படை. மேலும் X-ல் $n$ என்ற முடியும் அளவு மூலகங்கள் இருந்தால் P(X)-ல் $2^n$ மூலகங்கள் இருக்கும் என்பது முன்னர் பார்த்ததே. இதை அடிப்படையாக வைத்துக் கொண்டு '$q$ என்பது $y$ என்ற ஏதேனும் ஒரு கணத்தின் இயல் எண் என்றால் P($y$) என்னும் அதன் அடுக்குக் கணத்தின் இயல் எண்ணை $2^q$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.'

**7·28 தேற்றம்:** *$q$, $2^q$ ஆகியவை ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தையுடைய கணம், அதன் அடுக்குக் கணம் (Power set) ஆகியவற்றின் அளவை எண்கள் என்றால் (அளவை எண்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் '<' என்னும் தொடர்பின்படி) $q<2^q$.*

**நிரூபணம்:** *(இத் தேற்றத்தின் நிரூபணம் கடினமானதல்ல; ஆனால் நமக்கு அவசியமானதல்ல.)*

மேற்கூறிய தேற்றத்தின்படி $\aleph_0<2^{\aleph_0}$ ஆனால், $2^{\aleph_0}$, $c$ ஆகியவற்றிற்கு இடையில் உள்ள தொடர்பு என்ன? $2^{\aleph_0}<c$ என்றால் $\aleph_0<2^{\aleph_0}<c$ என்று எழுதும்படியாக $\aleph_0$, $c$ ஆகியவற்றிற்கிடையில் ஓர் இயல் எண் உள்ளது. அதாவது (Cantor's continuum hypothesis) தப்பாகிவிடுகிறது. மேலும் இங்கு

$2^{\aleph_0} = c$ என்று நிரூபிக்க முடியும். மீண்டும் தேற்றம் 2·38-ன் படி $c < 2^c$. அதாவது $c$ என்ற இயல் எண்ணை விடப் பெரிய இயல் எண்களும் உள்ளன. இவ்வாருக நமக்குக் கிடைத்துள்ள இயல் எண்கள்

$$1 < 2 < 3 \ldots \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = c < 2^c < 2^{2^c} < \ldots$$

என்னும் தொடர்புக்கு உட்பட்டுள்ளன.

குறிப்பு: வெற்றுக் கணத்தை ($\phi$) நாம் எப்படி எடுத்துக் கொள்வது என்பது ஆராய்தற்குரியது. வெற்றுக் கணத்தில் மூலகங்களே இல்லையாதலால் வெற்றுக் கணத்தின் இயல் எண் '0' (Zero, பூச்சியம்) என்று எடுத்துக்கொண்டால் விபரீதங்கள் இருப்பதாகத் தோன்றவில்லை. இயல் எண் சம்மந்தப்பட்ட முன்னைய தேற்றங்களை வெற்றுக் கணத்திற்கும் விரித்தால், $|\phi| < |P(\phi)|$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு $|\phi| = 0$; $|P(\phi)| = |\{\phi\}| = 1$, என்று உள்ளன. எனவே, $|\phi| = 0$ என்பதே பொருத்தமாகத் தோன்றுகிறது.

(கணத்தின் வெட்டு முதலிய செயலிகளையும், இயல் எண்களையும் பொருத்திப் படிக்கும்போது கிடைக்கும் குணங்களிலிருந்து $|\phi|$ க்கு மிகவும் பொருத்தமான ஒரு மதிப்புக் கிடைக்கலாம்.)

## பயிற்சி

1. A, B என்பன முடியும் கணங்களாக இருந்தால்
   $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ என்று நிரூபிக்க.

2. ஒரு கல்லூரியிலுள்ள மாணவர்களில் 70% மாணவர்கள் கணிதம் படிக்கின்றனர்; 40% மாணவர்கள் பொருளாதாரம் படிக்கின்றனர். கணிதம், பொருளாதாரம் ஆகிய இரண்டையும் (both mathematics and economics) படிக்கும் மாணவர்களின் சதவீதத்தைப் (percentage) பற்றி என்ன சொல்ல முடியும்? கணிதம், பொருளாதாரம் ஆகிய இரண்டையுமே படிக்காத (neither mathematics nor economies) மாணவர்களின் சதவீதத்தைப் பற்றி என்ன சொல்லலாம்?

3. Z என்ற முழு எண்களின் கணமானது N என்ற இயற்கை எண்களின் கணத்தோடு அளவையில் சமமாக உள்ளது என்று காட்டுக.

4. n என்பது ஒரு முழு எண் என்றால், $|\{n+7, n+8, n+9, \ldots\}| = |N|$ என்று நிரூபிக்க.

5. கேன்டரின் மூலைவிட்டப்படுத்தும் முறையை உபயோகித்து, $P=\{(a, b) \mid a, b \in N\}$ என்னும் கணம் எண்ணத்துக்கு உட்பட்டது என்று நிரூபிக்க.

6. $A= \{(a, b)/a, b \in Z\}$, $B=\{a, b \in Q\}$ ஆகிய கணங்கள் எண்ணத்துக்கு உட்பட்டவை என்று காட்டுக.

7. $X_i, i \in J$ என்பவை எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணங்கள் என்க. J என்பதுவும் எண்ணத்துக்குட்பட்ட கணமாக இருந்தால் $\bigcup_{i \in J} X_i$ என்பதும், எண்ணத்துக்கு உட்பட்டதாகும். (countable union of countable sets is countable) என்று நிரூபிக்க.

8. A, B என்பவை எண்ணத்துக்கு உட்பட்டவை என்றால், $A \times B$ என்பதுவும் எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணம் என்று நிறுவுக.

9. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பவை எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணங்கள் என்றால், $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ என்பதுவும் எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணம் என்று நிறுவுக.

10. எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட முடியாக் கணம் ஒவ்வொன்றும் அதன் முறையான உட்கணம் ஒன்றுடன் அளவையில் சமமாக இருக்கும் (Numerically equivalent) என்று நிரூபிக்க. (மேலே கொடுத்திருக்கும் பயிற்சி 4 உபயோகிக்கப்படலாம்.)

11. எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணத்தில் ஒவ்வோர் உட்கணமும் எண்ணத்துக்கு உட்பட்டது என்று நிறுவுக.

12. A, B ஆகிய கணங்களுக்கிடையில் $f : A \longrightarrow B$ என்னும் முழுச்சார்பு இருக்கிறது என்க. A என்பது எண்ணத்துக்கு உட்பட்ட கணம் என்றால் B-ம் எண்ணத்திற்கு உட்பட்ட கணம் என்று நிரூபிக்க.

3. $2^{\aleph_0} = c$ என்று நிரூபிப்பதற்கு முயற்சி செய்க.

14. விகிதமுறு எண்களின் (Irrational numbers) கணமானது எண்ணத்திற்கு உட்பட்டதல்ல என்று நிரூபிக்க.

(விகிதமுரு எண்கள் என்பதன் மூலம் நாம் மெய் எண்களில் விகிதமுறு எண்கள் நீங்கலாக உள்ள மீதி எண்களைக் குறிப்பிடுகின்றோம்.)

15. ஒவ்வொரு முடியாக் கணமும் (Infinite set), எண்ணத்திற்கு உட்பட்ட முடியாக் கணம் (Countable infinite set) ஒன்றைத் தன்னகத்தே கொண்டுள்ளது என்று நிரூபிக்க.

16. ஒவ்வொரு முடியாக் கணமும் அதனுடைய முறையான உட்கணம் ஒன்றுடன் அளவையில் சமமாக உள்ளது.

17. மேலே கொடுத்துள்ள பயிற்சி 7-ல் J என்பது எண்ணத் திற்கு உட்படாத கணமாக இருந்தால் $\bigcup_{i \in J} X_i$ என்பது எண்ணத்துக்கு உட்பட்டதாகவோ, உட்படாததாகவோ இருக்கலாம் என்பதற்கு எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

18. S என்பது ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. S இலிருந்து அதன் முறையான உட்கணம் ஒன்றுக்கு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடிந்தால் S முடியாக் கணம்'' என்று வரையறுப்பாரும் உளர். நாம் முடியாக் கணத்திற்குக் கொடுத்துள்ள வரையறையும் (7·8) இவ்வரையறையும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவையா (equivalent) என்பதைக் காண்க.

இவ்வரையறைப்படி முழு எண்களின் கணம் (Z), மெய் எண் களின் கணம் (R) ஆகியவை முடியாக் கணங்கள் என்று நிரூபிக்க. மேலும் இவ்வரையறைப்படி முடியாக் கணம் ஒன்றை உட்கண மாகக் கொண்ட ஒவ்வொரு கணமும் முடியாக் கணம் என்று நிரூபிக்க.

பகுதி II

# குழுக்களும் அவற்றின் குணங்களும்

## (Groups and Properties)

### அறிமுகம்

எண் கணிதத்தில் (Arithmetic) நாம் எண்களை வைத்துத்தான் கணக்குகளைச் செய்கிறோம். அங்கு ஒரு கணக்குக்குக் கிடைக்கும் விடையை அதேமாதிரியான அடுத்த கணக்குக்குக் கூடப் பயன் படுத்த முடிவதில்லை. ஆனால் அல்ஜிப்ரா (Algebra)வில் எண் களுக்குப் பதில் $a, b, c, d$ போன்ற குறியீடுகள் (symbols) மெய் எண்களைக் குறிப்பதாக வைத்துக்கொண்டு கணக்குகளைச் செய் கிறோம். இந்தக் கணக்குகளுக்குக் கிடைக்கும் விடைகள் எண் கணிதத்தில் கிடைக்கும் விடைகளை விட மிகவும் பொதுப்படை யானவை. $a, b, c$ ஆகியவற்றிற்கு நம் விருப்பம்போல் மதிப்பு களைக் கொடுத்து விடையைக் கண்டுபிடிக்கலாம். அதாவது மெய் எண்களைப் பயன்படுத்தி வரும் பல கணக்குகளை ஒரேயடியாகச் செய்வதற்கு அல்ஜிப்ரா உதவுகிறது.

இதுபோல் சிக்கல் எண் (Complex number)களின் குணங்களைப் படிக்கவேண்டும் என்றால் அல்ஜிப்ராவில் நாம் பயன்படுத்திய அதே முறையைப் பயன்படுத்தினால் போதும்; ஆனால் மூலகங் களுக்குள் உள்ள கூட்டல், பெருக்கல் போன்ற செயலிகளை மட்டும் சிக்கல் எண்களுக்கேற்ப மாற்றி அமைக்கவேண்டும். இவ்வாறாக நாம் செய்யும் கணிதம் நாம் விரும்பும் எண்களுக்கிடையே உள்ள (கூட்டல், பெருக்கல் போன்ற) செயலிகளுக்கேற்ப மாறுபடுகிறது.

இக்கால அல்ஜிப்ரா (Modern Algebra)வானது பல்வேறு வகை யான கூட்டங்களில் உள்ள மூலகங்களின் தன்மையை மறந்து,

அவை தமக்குள் நடத்தும் செயலிகளின் தன்மைகளை மட்டும் கருத்தில்கொண்டு உருவாக்கப்பட்ட கணித அமைப்புகளை (Mathematical structures)ப் பற்றிப் படிப்பதாகும். இங்கு மூலகங்களுக்கு இடையே உள்ள செயலிகள் ஒரு சில விதிகளுக்கு மட்டுமே உட்பட்டிருக்கின்றன என்று எடுத்துக்கொண்டு நாம் பல குணங்களைக் காண்கிறோம். உண்மையில் இக்குணங்கள் அனைத்தும் நாம் எடுத்துக்கொண்ட விதிகளுக்கு உட்பட்டுச் செயல் நடத்தும் மூலகங்களை உடைய எந்தக் கூட்டத்திற்கும் பொருந்தும். நாம் குறைவான விதிகளை எடுத்துக்கொண்டால் குறைவான குணங்களையே கண்டுபிடிக்க முடியும். ஆனால் இக்குணங்கள் பல கூட்டங்களுக்குப் பொருந்தும். நாம் அதிகமான விதிகளை எடுத்துக் கொண்டால் அதிகமான குணங்கள் கிடைக்கும். ஆனால் குறைவான கூட்டங்களுக்கே இவை பொருந்தும். இவ்வாறான கணித அமைப்புகளில் ஓரளவு குறைந்த அளவு விதிகளை எடுத்துக் கிடைக்கும் அமைப்பு, குழு (group) எனப்படுவதாகும்.

# 1. வரையறையும் சில குணங்களும்

## (Definition and Some properties)

1·1. வரையறை : இரண்டு பொருட்களைத் தொடுத்து, தனித்த (Unique) மற்றொரு பொருளைப் பெறும் செயலானது ஈருறுப்புச் செயல் (Binary operation) எனப்படும். இவ்வினையை ஈருறுப்புச் செயலி என்பதுண்டு. (இதுவே வரையறை 3·1 Ch. I-ம் ஆகும்.)

1·2. வரையறை : $a$, $b$ என்பன X என்ற கணத்தின் எவையேனும் இரு மூலகங்களாக இருக்கும்போது $a \odot b$ என்ற தனித்த பொருளை (கணியத்தை, quantity)க் கண்டுபிடிக்க முடியுமாயின் "X என்ற கணத்தில் $\odot$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது" எனலாம்.

1·3. எ. கா. : முழு எண்களின் கணத்தில் + (கூட்டல்) என்பது ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். 3, 5 என்ற இரண்டு மூலகங் களையும் எடுத்து, அவைகளை இச்செயலிக்கு உட்படுத்தினால் $3+5=8$ என்ற எண் கிடைக்கிறது.

மேலும் முழு எண்களின் கணத்தில் × (பெருக்கல்) என்பதுவும் ஈருறுப்புச் செயலி ஆகும். கணங்களுக்குள், கணங்களின் இணைப்பு, கணங்களின் வெட்டு ஆகியவை ஈருறுப்புச் செயலிகள் ஆகும்.

1·4. வரையறை : G என்ற மூலகத்தையுடைய கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $\oplus$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியானது பின் வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கும்போது (G, $\oplus$) என்ற கணித அமைப்பு ஒரு குழு (Group) எனப்படும்.

(i) G என்ற கணம் $\oplus$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது (G is closed under $\oplus$). அதாவது $a \in G, b \in G \Longrightarrow a \oplus b \in G$

(ii) $\oplus$ என்பது சேர்ப்பு விதி (Associative law)-க்கு உட்பட்டிருக்கிறது. அதாவது $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ $\forall\ a, b, c \in G$.

(iii) G-ல் '$e$' என்ற அலகு (identity அல்லது identity element) ஒன்று உள்ளது. அதாவது $a.e = e.a = a$ $\forall\ a \in G$ என்னும் விதிக்கேற்ப, $e$ என்ற மூலகம் G-ல் உள்ளது.

(iv) G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை (inverse அல்லது inverse element) ஒன்று உள்ளது. அதாவது G-ல் உள்ள $a$ என்ற எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் $a \oplus a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு $a^{-1}$ என்ற ஒரு மூலகம் G-ல் உள்ளது.

**1·5.** எ. கா.: முழு எண்களின் கணமும் (Z), அதில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் '+' என்ற செயலியும் சேர்ந்து ஒரு குழுவாகும். அதாவது (Z, +) ஒரு குழு.

(i) $a, b$ என்பவை முழு எண்கள் என்றால், $a+b$ என்பதுவும் முழு எண் ஆகும். அதாவது Z என்பது + -ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$ என்பது $a, b, c$ ஆகியவை முழு எண்களாக இருக்கும்போது உண்மையாகும்.

(iii) $a$ என்பது Z-ல் உள்ள எந்த மூலகமாயிருப்பினும் $a+0=0+a=a$ என்னும்படியாக '0' என்ற முழு எண் (அலகு) Z-ல் உள்ளது.

(iv) Z-ல் உள்ள $a$ என்ற எந்த மூலகத்திற்கும் $(-a)+a=a+(-a)=0$ என்னும்படியாக $(-a)$ என்னும் மூலகம் Z-ல் உள்ளது. அதாவது $a$-க்குப் பதில் 5 ஐ எடுத்துக்கொண்டால் $-5$ என்னும் எதிர்மறை உள்ளது.

இங்கு $a^{-1}=-a$; $a^{-1}$ என்னும் குறியீட்டை $\frac{1}{a}$ என்பதைக் குறிப்பிட நாம் உபயோகிக்கவில்லை. $a$ என்ற மூலகத்தின் எதிர்மறை மூலகத்தைக் குறிப்பிடவே உபயோகித்தோம்.

(i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து (Z, +) ஒரு குழுவாகும்.

**1·6.** எ.கா.: Q′ என்பது பூச்சியமல்லாத விகிதமுறு எண்களின் (rationals) கணம் என்க. இதில் '.' என்ற செயலியைச் சாதாரணப்

பெருக்கல் என்று எடுத்துக் கொள்க. இப்போது $(Q', .)$ ஒரு குழு வாகும்.

நிரூபணம் : $Q'$-ன் மூலகங்கள் $\frac{p}{q}$, $p$, $q$ ஆகியவை பூச்சிய மல்லாத முழு எண்கள் என்னும் வடிவில்தான் இருக்கும்.

(i) $$\frac{p_1}{q_1} \in Q', \frac{p_2}{q_2} \in Q' \Longrightarrow \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} \in Q'$$

(ii) $(a.b).c = a.(b.c)$ என்பது எந்த மெய் எண்களுக்கும் உண்மையாக இருப்பதால், இது $Q'$-ன் மூலகங்களுக்கும் உண்மையாக இருக்கும்.

(iii) 1 என்ற விகிதமுறு எண் $Q'$-ல் அலகாக உள்ளது.

(iv) $\frac{p}{q}$ என்ற $Q'$ன் மூலகத்திற்கு $\frac{q}{p}$ என்ற எதிர்மறை மூலகம் உள்ளது.

(i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து $(Q', .)$ ஒரு குழு வாகும்.

**1·7. எ.கா. :** $Q'$ என்ற கணம் $\div$ என்ற ஈருறுப்புச் செயலியின் கீழ், குழு அல்ல. விதிகளை ஒவ்வொன்றாகச் சரி பார்க்குங்கால்,

(i) $a$, $b$ என்பன $Q'$-ல் இருந்தால்

$$a = \frac{p_1}{q_1}, \quad = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\therefore \quad a \div b = \frac{p_1}{q_1} \div \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2} \in Q'.$$

(ii) $a$, $b$, $c$ என்பன $Q'$-ன் எவையேனும் மூன்று மூலகங்கள் என்றால்,

$$(a \div b) \div c = \left(\frac{a}{b}\right) \div c = \frac{a}{bc}$$

$$a \div (b \div c) = a \div \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ac}{b}$$

$$\therefore \quad (a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$$

எனவே, ÷ என்ற செயலி சேர்ப்பு விதிக்கு உட்படவில்லை. அதாவது(Q′, · )என்பது குழு அல்ல (நான்கு விதிகளும் உண்மையாக இருந்தால்தான் குழு என்கிறோம். ஏதேனும் ஒன்று தவறுயினும் குழு ஆகாது.)

குறிப்பு : நாம் கொடுத்த எடுத்துக்காட்டுகள் 7 5, 7·6 ஆகியவற்றுள் உள்ள ஈருறுப்புச் செயலிகள் பரிமாற்று விதி (Commutative law)க்கு உட்பட்டு இருந்தன. $(a\oplus b = b\oplus a)$ ஆனல் எ.கா. 7·7-ல் உள்ள ஈருறுப்புச் செயலி பரிமாற்று விதிக்கு உட்படாமல் இருக்கிறது. (G,·) என்ற அமைப்பு, குழுவாக இருப்பதற்குப் பரிமாற்று விதி தேவையல்ல. உண்மையில் இவ்விதி தவருக இருக்கும்போதுகூட, குழுவாக இருக்கும் அமைப்புகள் உள்ளன.

1·8. எ. கா.: $T=\left\{1, -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்க. இங்குச் சிக்கல் எண்களைப் பெருக்கும் செயலை ‘ · ’ என்று குறிப்பிடுக. இப்போது (T, ⊙) என்பது ஒரு குழுவாகும்.

நிருபணம் : $w=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ என்க.

$$\therefore\ w.w=w^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\ T=\{1, w, w^2\}$$

மேலும் $w.w^2=w^3=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$$=(-\tfrac{1}{2})^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}=1$$

$w\odot w=w^2$, $w^3=1$ என்னும் விதிகளை உபயோகித்து (T,·) ஒரு குழு என்பதை இலகுவில் நிரூபிக்கலாம்.

## m-ன் மட்டுக்குக் கூட்டல் (Addition modulo m)

7-ன் மட்டுக்குக் கூட்டலை நாம் கீழே பார்ப்போம். இதிலிருந்து நாம் m-ன் மட்டுக்குக் கூட்டல், m-ன் மட்டுக்குப் பெருக்கல் ஆகியவை எவ்வாறிருக்கும் என்பதைத் தெரிந்து கொள்ளலாம்.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய எண்களை எடுத்துக் கொள்க. இதில் இரண்டு எண்களைக் கூட்டும்போது 7 ஐ விடக் கூடுதலான ஓர் எண் கிடைக்கலாம். ஆனால் அந்த எண்ணுக்குப் பதிலாக அதை 7ஆல் வகுப்பதால் கிடைக்கும் மீதியை எழுதவேண்டும். இவ்வாறு $5+6=11$ ஆனால் 11ஐ 7 ஆல் வகுக்கும்போது 4 என்ற எண் மீதியாகக் கிடைக்கிறது. ஆகவே 7-ன் மட்டுக்குக் கூட்டலில் $5+6=4$. இங்கு $-4$ முதலிய எதிர்த்திசை (negative) எண்கள் வருவதில்லை. ஏனெனில் $-4$ உடன் 7-ன் பெருக்குத் தொகைகளை (மடங்குகளை, multiples)க் கூட்டி 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகியவற்றுள் ஒன்றாக எழுதிவிடலாம். இக்கூட்டலை '$+_7$' என்று குறிப்பிடுவதுண்டு. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்ற கணத்தின் மூலகங்களை **7-ன் மட்டுக்கான முழு எண்கள்** (integers modulo 7) என்பர். இக்கணம் $Z_7$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

இதுபோல் $\{1, 2, 3, \ldots (m-1)\}$ என்ற கணத்தை $Z_m$ எனலாம். $Z_m$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '$+$' என்றால் '$+_m$' என்பது தான் பொருள். 7-ன் மட்டுக்கான பெருக்கலிலும் பெருக்குத் தொகை 7ஐத் தாண்டும் போது அதிலிருந்து 7-ன் மடங்குகளைக் கழித்துவிட்டு மீதியை எழுதுகிறோம். இப்பெருக்கலை '$\cdot_7$' என்று குறிப்பிடுவதுண்டு. $Z_m$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '$\cdot$' என்றால் '$\cdot_m$' என்பதுதான் பொருள்.

**1·9.** எ. கா.: $(Z_7, +)$ ஒரு குழுவாகும்.

நிரூபணம்: $Z_7 = \{0, 1, 2, \ldots 6\}$

(i) $1+2 = 3 \in Z_7$

$5+6=11=4 \in Z_7$

⋮ ⋮

இவ்வாறு $Z_7$ என்பது $+$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

(ii) $(a+b)+c$, $a+(b+c)$ ஆகிய இரண்டும் 7-ஆல் வகுக்கப் படும்போது ஒரே மீதியைக் கொடுப்பதால் $a+(b+c) = (a+b)+c$.

(iii) $a+0 = 0+a = a \quad \forall\, a \in Z_7$

அதாவது '0' என்ற அலகு $Z_7$-ல் உள்ளது.

(iv) $0+0 = 0 \quad \therefore \quad 0^{-1} = 0 \in Z_7$

$1+6 = 0 \quad \therefore \quad 1^{-1} = 6 \in Z_7 ; \; 6^{-1} = 1 \in Z_7.$

$2+5 = 0 \quad \therefore \quad 2^{-1} = 5 \in Z_7 ; \; 5^{-1} = 2 \in Z_7.$

$3+4 = 0 \quad \therefore \quad 3^{-1} = 4 \in Z_7 ; \; 4^{-1} = 3 \in Z_7.$

அதாவது $Z_7$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை மூலகம் $Z_7$-ல் உள்ளது. (i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து $(Z_7, +)$ என்பது ஒரு குழுவாகும்.

**1·10. எ. கா.:** $(Z_6, \cdot)$ என்பது குழு அல்ல.

இங்கு முதல் மூன்று விதிகளும் சரியாக உள்ளன. ஆனால் நாலாவது விதியில் '0' என்ற $Z_6$-ன் மூலகத்திற்கு எதிர்மறை மூலகம் இல்லை. 1 என்ற மூலகம் $(Z_6, \cdot)$-ன் அலகாக இருக்கும்.

**1·11. எ. கா.:** $(Z_6-\{0\}, \cdot)$ ஒரு குழு அல்ல.

ஏனெனில் $2 \in Z_6-\{0\}$

$3 \in Z_6-\{0\}$

ஆனால் $2 \cdot 3 = 6 = 0 \notin Z_6-\{0\}$.

அதாவது $Z_6-\{0\}$ என்ற கணம் '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்படவில்லை.

எனவே $(Z_6-\{0\}, \cdot)$ குழு அல்ல.

**1·12. எ. கா.** $(\{1, -1\}, \cdot)$ ஒரு குழுவாகும்.

['.' என்பது மெய் எண்களுக்கான சாதாரணப் பெருக்கல்]

**1·13. எ. கா.:** A என்பது மூலகத்தையுடைய ஏதேனும் ஒரு கணம் என்றால்,

$(\{A, \phi\}, \triangle)$ ஒரு குழுவாகும்.

**1·14 எ. கா.:** X என்பது மூலகத்தையுடைய ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. M என்பது X இலிருந்து X-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்புகளை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணம் என்க. '.' என்பது M-ன் மூலகங்களுக்கிடையே

$$x\,(f \cdot g) = ([x]f)g$$

என்று வரையறுக்கப்பட்ட ஈருறுப்புச் செயலி என்க. $(M, \cdot)$ ஒரு குழுவாகும்.

நிரூபணம் ; M என்ற கணம் '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. ஏனெனில் $f, g \in M \Longrightarrow f : X \longrightarrow X$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு.

$\& \; g : X \longrightarrow X$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு.

எனவே தேற்றத்தின்படி [Ch. I, 6.22] $(f.g) : X \longrightarrow X$ என்பதுவும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். எனவே $(f.g) \in M$.

(i) இவ்வாறு $f \in M,\ g \in M \Longrightarrow f.g \in M$. ... (i)

(ii) சேர்ப்புவிதி (Associative law) சார்புகளின் இணைப்புக்கு உண்மையாக இருப்பதால் இங்கும் உண்மையாக இருக்கும்.

(iii) $I_x : X \longrightarrow X$ என்ற அலகுச்சார்பு $(M, \cdot)$-ன் அலகாகும். ஏனெனில் $I_x \cdot f = f \cdot I_x = f \quad \forall f \in M$.

(iv) $f : X \longrightarrow X$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்பு என்றால் $f^{-1} : X \longrightarrow X$ என்பதுவும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். [Ch. I. 6·20].

மேலும் $f^{-1} \cdot f = f \cdot f^{-1} = I_x$

இவ்வாறு $f$ என்ற எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை மூலகம் $(f^{-1})$ M-ல் உள்ளது.

(i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து $(M, \cdot)$ ஒரு குழு என்பது விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டில், X என்ற கணத்தில் முடியும் அளவு மூலகங்கள் இருந்தால் $(M, \cdot)$-லும் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருக்கும். X-ல் முடியா அளவு மூலகங்கள் இருந்தால் $(M, \cdot)$-லும் முடியா அளவு மூலகங்கள் இருக்கும்.

X-ல் '$n$' மூலகங்கள் இருந்தால் $(M, \cdot)$-ல் $\lfloor n$ மூலகங்கள் இருக்கும். இக்குழுவை 'Symmetric group of degree $n$' என்றோ அல்லது Permutation group of degree $n$ என்றோ சொல்வது வழக்கம். இது சாதாரணமாக $S_n$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

குழு என்ற கணித அமைப்பில் ஒரே ஒரு ஈருறுப்புச் செயலி தான் உள்ளது. இதை நாம் ( . ) என்று குறிப்பிட்டு எல்லாக் குழுக்களுக்கும் பொதுவான சில குணங்களைக் காண்போம்.

குழுவில் உள்ள மூலகங்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் ஈருறுப்புச் செயலியானது சேர்ப்பு விதி (associative law)-க்கு உட்பட்டிருப்பதால் $(a.b).c = a.(b.c)$ என்பது வெளிப்படை. எனவே இதை $a.b.c$ என்று அடைப்புக் குறியின்றியே எழுதி விடலாம். ஆனால் மூலகங்கள் வரும் வரிசையை மட்டும் மாற்றக் கூடாது. $a.a$ என்பதை $a^2$ என்று குறிப்பிடலாம். இது போல் $a.a.a$ என்பதை $a^3$ என்று குறிப்பிடலாம். இதுபோல் $a^4, a^5, \ldots, a^n, \ldots$ என்பவையும் பொருள் பெறும்.

**1·15.** வரையறை : (G, . ) என்பது ஒரு குழு என்க. G என்ற கணத்தில் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருந்தால் (G, . ) என்பது முடியும் குழு (finite group) எனப்படும். G என்ற கணத்தில் முடியா அளவு மூலகங்கள் இருந்தால் (G, . ) என்பது முடியாக் குழு (infinite group) எனப்படும்.

**1·16.** வரையறை : (G, . ) என்பது ஒரு முடியும் குழு என்க. G என்ற கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கையை (G, . ) என்ற குழுவின் பரிமாணம் (order of the group) என்கிறோம்.

**1·17.** வரையறை : $a$ என்பது (G, . ) என்ற குழுவிலுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $e$ என்பது (G, . )-ன் அலகு என்க. $a^n = e$ என்னும் விதிக்குட்பட்டுள்ள $n$-ன் மிகை $(+ve)$ முழு எண் மதிப்புகளில் மிகவும் குறைந்த மதிப்பை $a$-ன் பரிமாணம் (order of a) என்கிறோம். $a^n = e$ என்பது உண்மையாக இருக்கும்படி '$n$' என்ற மிகை முழு எண் இல்லாவிட்டால் $a$-ன் பரிமாணம் $\infty$ (infinity, கந்தழி) எனப்படும்.

**1·18.** எ.கா.: $(\{1, -1\}, .)$ என்ற குழுவில் 1 என்பது அலகாகும். இக் குழுவின் பரிமாணம் 2. 1 என்ற மூலகத்தின் பரிமாணம் 1; $(-1)$ என்ற மூலகத்தின் பரிமாணம் 2. $\{$ஏனெனில் $(-1).(-1) = 1\}$.

**1·19.** வரையறை : (G, . ) ஒரு குழு என்க. G-ல் உள்ள $a, b$ என்ற எந்த இரு மூலகங்களுக்கும் $a.b = b.a$ என்பது உண்மையாக இருந்தால் (G, . ) என்ற குழு பரிமாற்றுக் குழு (Commutative group) எனப்படும். அதாவது ஒரு குழுவின் செயலியானது பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் அக் குழு அபீலியன் குழு எனப்படும்.

**1·20. எ.கா. :** எ·கா. 1·18-ல் உள்ள $(\{1, -1\}, .)$ என்ற குழு பரிமாற்றுக் குழுவாகும். மேலும், மெய் எண்கள், சிக்கல் எண்கள் ஆகியவற்றை மூலகங்களாகவும், சாதாரணக் கூட்டல் அல்லது பெருக்கலைச் செயலியாகவும் கொண்டுள்ள குழுக்கள் அனைத்தும் பரிமாற்றுக் குழுக்களாக இருக்கும்.

### குழுவின் குணங்கள்

**1·21. குணம் :** அலகின் தனித்தன்மை (uniqueness of the identity element) ஒரு குழுவில் ஒரே ஒரு அலகுதான் இருக்க முடியும்.

நிரூபணம் : இது உண்மை அல்ல என்றால் $(G, .)$ என்ற குழுவில் $e, e_1$ ஆகிய இரண்டு அலகுகள் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$e$ என்பது அலகு. ∴ $e.x = x \ \forall \ x \in G$

∴ $e.e_1 = e_1$ ... ... ... (1) $(\because e_1 \in G)$

$e_1$ என்பது அலகு ∴ $x.e_1 = x \ \forall \ x \in G$

∴ $e.e_1 = e$ ... ... ... (2) $(\because e \in G)$

1. 2, ஆகியவற்றிலிருந்து $e_1 = e$.

அதாவது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட அலகுகள் இருக்க முடியாது.

**1·22. குணம் :** எதிர்மறையின் தனித்தன்மை (Uniqueness of the inverse)

குழுவில் உள்ள எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் வெவ்வேறான இரண்டு எதிர் மறை மூலகங்கள் இருக்க முடியாது.

நிரூபணம் : இது உண்மை அல்ல என்றால் $(G, .)$ என்ற குழுவில் உள்ள $x$ என்ற மூலகத்திற்கு $x_1, x_2$ என்ற இரு எதிர் மறைகள் இருப்பதாகக் கொள்க. $e$ என்பது அலகு என்க. எதிர் மறை மூலகத்தின் குணத்தின்படி,

$x.x_1 = x_1.x = e$ ... ... ... (1)

$x.x_2 = x_2.x = e$ ... ... ... (2)

G-ன் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருப்பதால்

$(x_1 . x). x_2 = x_1.(x . x_2)$

$(x_1 . x), (x . x_2)$ ஆகியவற்றிற்கு (1),(2) ஆகியவற்றிலிருந்து மதிப்புக் (பெறுமானம்) கொடுத்தால் $e.x_2 = x_1.e$ அதாவது $x_2 = x_1$ என்று

கிடைக்கும். அதாவது $x$ என்ற மூலகத்திற்கு வெவ்வேறான இரண்டு எதிர்மறை மூலகங்கள் இருக்க முடியாது.

**1·23.** குணம் : $x$ என்பது $y$ என்ற மூலகத்தின் எதிர்மறை என்றால் $y$ என்பது $x$-ன் எதிர்மறை மூலகமாகும். அதாவது

$x = y^{-1} \Longrightarrow y = x^{-1}$ அல்லது $(y^{-1})^{-1} = y$.

(நிரூபணம் : எதிர்மறை மூலகத்தின் வரையறையிலிருந்து இது விளங்கும்.)

**1·24.** குணம் : பின்வரும் **நீக்கல் விதிகள்** (cancellation laws) குழுவில் உண்மையாக இருக்கும்.

$x, y, z$ என்ற எந்த மூன்று மூலகங்களை எடுத்துக்கொண்டாலும்,

(i) $xy = xz \Longrightarrow y = z$ (இடது நீக்கல் விதி)

(ii) $yx = zx \Longrightarrow y = x$ (வலது நீக்கல் வழி)

(i)-ன் நிரூபணம் : $xy = xz$ ... ... (1)

$x^{-1}$ என்பது $x$-ன் எதிர்மறை மூலகம் என்க.

(1)-ன் இடப் புறத்தில் $x^{-1}$ ஆல் பெருக்கினால், ('.' என்னும் செயலை நிகழ்த்தினால்)

$$x^{-1}.(xy) = x^{-1}.(x,z)$$

அதாவது $(x^{-1}.x).y = (x^{-1}x).z$ [சேர்ப்பு விதி]

அதாவது $e.y = e.z$ [$e$ என்பது அலகு என்றால்]

அதாவது $y = z$

இவ்வாறு $xy = xz \Longrightarrow y = z$.

இதுபோலவே, வலது நீக்கல் விதியையும் நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு : குழுக்களைப் பற்றிப் படிக்குங்கால் $x.y$ என்பதைச் சுருக்கமாக $xy$ என்று '.' அடையாளம் இன்றியே குறிப்பிடுவதுண்டு. இதையே நாம் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

**1·25.** குணம் : $a, b$ என்பவை குழுவின் எவையேனும் இரு மூலகங்களாக இருந்தால், $ax = b$ என்னும் சமன்பாட்டிற்குத் **தனித்த மூலம்** (Unique solution) உள்ளது.

நிரூபணம் : $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்க. $a^{-1}$ என்பது $a$-ன் எதிர்மறை மூலகம் என்றும், $e$ என்பது குழுவின்

அலகு என்றும் எடுத்துக் கொள்க. சமன்பாட்டின் இடப் புறத்தில் $a^{-1}$ ஆல் செயல் நடத்தினால்,

$$a^{-1}\cdot(ax)=a^{-1}b$$

அதாவது $(a^{-1}\cdot a).x=a^{-1}b$ (சேர்ப்பு விதி)

அதாவது $(e.x=a^{-1}\cdot b \Longrightarrow x=a^{-1}.b$

எனவே, $ax=b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $a^{-1}b$ என்ற தனித்த மூலம் உள்ளது.

**1·26.** குணம் : $a$, $b$ என்பவை குழுவின் எவையேனும் இரு மூலகங்களாக இருந்தால் $xa=b$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தனித்த மூலம் உள்ளது.

[இதையும் 1·25 ஐப் போலவே நிரூபிக்கலாம்.]

**1·27.** குணம் : $(G, .)$ என்பது '$n$' என்ற பரிமாணத்தைக் கொண்ட முடியும் குழு என்க. G-ல் உள்ள '$a$' என்ற எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் $a^k=e$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு $k\leqslant n$ என்ற ஒருநேர்த் திசை முழு எண்ணுவது உள்ளது. ($e$ என்பது குழுவின் அலகு.)

நிரூபணம் : $e, a, a^2,\ldots a^n$ என்பவைகளை எடுத்துக் கொள்க. இவை அனைத்தும் G-ன் மூலகங்களே; ஏனெனில் இவை அனைத்தும் $e$, $a$ ஆகிய G-ன் இரு மூலகங்களிலிருந்து ஈருறுப்புச் செயலினால் கிடைப்பவையே. இக் கூட்டத்தில் $n+1$ மூலகங்கள் உள்ளன. ஆனால், G-ல் மொத்தம் $n$ வெவ்வேறான மூலகங்களே உண்டு. (பரிமாணம் $n$). ஆகவே, இக்கூட்டத்தில் எவையேனும் இரண்டு மூலகங்களாவது ஒன்றாக இருத்தல் வேண்டும். இது இரண்டு விதத்தில் ஏற்படலாம்.

**முதல் வகை :** இக் கூட்டத்தில் உள்ள $a^r$ என்பதும், $e$ என்பதும் ஒன்றானவை என்க. இப்பொழுது $a^r=e$ & $r\leqslant n$. எனவே தேற்றம்.

**இரண்டாம் வகை :** $a^i$, $a^j$, $i\neq j$ ஆகிய இரு மூலகங்களும் ஒன்றானவை என்க. இப்பொழுது, $i, j$ ஆகியவற்றுள் $i>j$ என்க. (ஏதேனும் ஒன்று பெரியதாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே நாம் இவ்வாறு எடுத்துக் கொள்ளலாம்.)

இப்போது $a.a.a\ldots i$ தடவைகள் $=a.a.a\ldots j$ தடவைகள்.

$e$ என்பது அலகு என்றால் இதை,

$a.a.a\ldots i$ தடவைகள் $=e.[a.a\ldots\ldots j$ தடவைகள்$]$ என்று எழுதலாம். வலது நீக்கல் விதியை உபயோகித்து ஒரு '$a$' ஐ நீக்கினால்

$a.a...(i-1)$ தடவைகள் $= e.[a.a...(j-1)$ தடவைகள்]. இவ்வாறாக நீக்கிக்கொண்டே போனால் $i > j$ என்பதனால் கடைசியில் $a, a...(i-j)$ தடவைகள் $= e$ என்று கிடைக்கும்.

அதாவது $a^{i-j} = e$.

$i, j$ ஆகிய இரண்டுமே $n$ ஐ விடக் குறைவான நேர்த் திசை எண்களாக இருப்பதனாலும் $i > j$ என்பதாலும், $i-j$ என்பது $n$ ஐ விடச் சிறிய நேர்த் திசை முழு எண்ணாகும். எனவே $a^{i-j} = e$ என்னும்படியாக $(i-j) < n$ என்ற நேர்த் திசை முழு எண் உள்ளது.

**1·28. குணம் :** முடியும் குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் முடியும் பரிமாணத்தை (finite order)க் கொண்டவை.

நிரூபணம் : முன் குணத்தின்படி (1·27) முடியும் குழுவில் உள்ள '$a$' என்ற எந்த மூலகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் $a^r = e$ என்னும்படியாக $r$ என்ற நேர்த்திசை முழு எண் உள்ளது. எனவே, $a$-ன் பரிமாணம் $\infty$ அல்ல; ஒரு நேர்த் திசை முழு எண்ணாகவே இருக்கும்.

**1·29. குணம் :** $a^{-1}, b^{-1}$ என்பன $a, b$ ஆகிய மூலகங்களின் எதிர்மறை மூலகங்கள் என்றால், $b^{-1} . a^{-1}$ என்பது $a . b$-ன் எதிர்மறை மூலகமாகும். அதாவது ஒரு குழுவில் $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.

நிரூபணம் : $(a \cdot b) \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} = a.[b \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1})]$ (சேர்ப்பு விதி)

$= a.[b.b^{-1}) \cdot a^{-1}]$ ,,

$= a.(e.a^{-1}$ ($e$ என்பது அலகு என்க.)

$= a.a^{-1}$

$= e$

இதுபோல் $(b^{-1}.a^{-1}).(a . b) = e$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

எனவே $(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$ என்பது தெளிவு.

குறிப்பு : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பவை (G,.) என்ற குழுவின் மூலகங்கள் என்றால், $(a_1 . a_2 \ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1} . a_{n-1}^{-1} \ldots a_1^{-1}$. (இதைக் குணம் 1·39-ன் உதவியால் நிரூபிக்கலாம்.)

**1·30. குணம் :** (G, ·) என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. $a, b$ என்பவை G-ன் மூலகங்கள் என்க. $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} \Longleftrightarrow a.b = b.a$

**நிரூபணம் :**

பாகம் 1 : $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b$ என்க.

$\therefore \ (a.b).(a^{-1}.b^{-1}) = e$ ($e$ என்பது அலகு என்றால்)

அதாவது $[(a.b).a^{-1}].b^{-1} = e$ (சேர்ப்பு விதி)

$b$ என்ற மூலகத்தைக் கொண்டு வலப் புறத்தில் செயல் நிகழ்த்தினால்,

$$\{[(a.b).a^{-1}].b^{-1}\}.b = e.b$$

அதாவது $[(a.b).a^{-1}].(b^{-1}.b) = b$ (சேர்ப்பு விதி)

அதாவது $[(a.b).a^{-1}].e = b$

அதாவது $(a.b).a^{-1} = b$

$a$ என்ற மூலகத்தைக்கொண்டு வலப் புறத்தில் செயல் நிகழ்த்தினால்,

$$[(a.b).a^{-1}].a = b.a$$

அதாவது $(a.b).a^{-1}a) = b.a.$ (சேர்ப்பு விதி)

அதாவது $(a.b).e = b.a \implies a.b = b.a$

பாகம் 2. $a.b = b.a$ என்க

$\therefore \ (a.b^{-1}) = (b.a^{-1})$

ஆனால் குணம் 1·29-ன் படி $(b.a)^{-1} = a^{-1}.b^{-1}$

$\therefore \ (a.b^{-1}) = a^{-1}.b^{-1}$

எனவே, குணம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**1·31.** குணம் : $(G, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க.

$(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1} \ \forall a, b \in G \iff (G,.)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு.

**நிரூபணம் :**

பாகம் 1. $(a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1} \ \forall a, b \in G$ என்க.

$\therefore \ a.b = b.a \ \forall a, b \in G$ [குணம் 1·30-ன் படி]

$\therefore \ (G, .)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

பாகம் 2. $(G, .)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்க.

$\therefore \ a.b = b.a \quad \forall a, b \in G$

$\therefore \quad (a.b)^{-1} = a^{-1}.b^{-1} \qquad \forall\ a, b \in G$

[குணம் 1·30-ன் படி.]

இவ்வாறு $(a.b)^{-1} = a^{-1} . b^{-1} \Longleftrightarrow (G, .)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு.

**1·32.** குணம்; ஒரு குழுவிலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் தன்னுடைய எதிர்மறை மூலகமாக இருந்தால் அக்குழு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

நிரூபணம் : $a, b$ என்பன $(G, .)$ என்ற குழுவின் எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்றும் $e$ என்பது அதன் அலகு என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$$a^{-1} = a \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1)$$

$$b^{-1} = b \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2)$$

$$(a.b)^{-1} = a.b \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (3)$$

ஆனால் $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$ என்பது எந்தக் குழுவிற்கும் உண்மை (1·29).

$\therefore$ (1), (2), (3) ஆகியவற்றை இதில் உபயோகித்தால் $a . b = b . a$ என்பது தெளிவு.

$\therefore$ $(G, \cdot)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

## பயிற்சி

1. பின்வரும் கணித அமைப்புகள் ஒவ்வொன்றும் குழுவா என்பதைக் காண்க. குழு என்றால் நிரூபிக்க; குழு அல்ல என்றால் காரணம் கொடுக்கவும்.

   (i) $(Q, .)$ (v) $(Q, +)$

   (ii) $(Z, .)$ (vi) $(R, +)$

   (iii) $(Z, -)$ (vii) $(R, -)$

   (iv) $(Q, -)$ (viii) $(R, .)$

   (இங்குள்ள $+$, $-$, $.$ ஆகியவை சாதாரணக் கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல் ஆகும்.)

2. $(Z_r - \{0\}, .)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க.

3. $(Z_m, +)$ என்பது $m$-ன் ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் மதிப்புக்கும் குழு என்று நிரூபிக்க.

4. $(Z_m - \{0\}, .)$ என்பது, $m$ வகுபடா எண் (பகா எண், Prime number)ணுக இருக்கும்போது குழு என்றும், $m$ வகுபடும் எண்ணுக இருக்கும்போது குழு அல்லவென்றும் நிரூபிக்க.

5. பின்வரும் அட்டவணையிலிருக்கும் கணித அமைப்புகள் குழுவா என்பதைக் காண்க.

| எண் | கணம் | ஈருறுப்புச் செயலி |
|---|---|---|
| 1. | $\{a+\sqrt{2}b / a,b \in Q\}$ | சாதாரணக் கூட்டல் |
| 2. | $\{\log x / x$ ஒரு நேர்த் திசை விகிதமுறு எண்$\}$ | ,, |
| 3. | $\{\log x / x$ ஒரு நேர்த் திசை மெய் எண்$\}$ | ,, |
| 4. | $\{5x / x \in z\}$ | ,, |
| 5. | $\{mx / m$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு முழு எண் & $x \in z\}$ | ,, |
| 6. | $\{mx / m$ கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் ஒரு மெய் எண் & $x \in z\}$ | ,, |
| | $\{a+b\sqrt{n} / a,b \in z, n$ முழு வர்க்கமல்லாத எண்$\}$ | ,, |
| 8. | $\{\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$ | சாதாரணப் பெருக்கல் |
| 9. | $\left\{ \frac{p}{q} \middle/ p, q \in N \right\}$ | ,, |
| 10. | $\{a+\sqrt{2}b / a,b \in Q.$ $a$-ம் $b$-ம் ஒரே சமயத்தில் பூச்சியமல்ல$\}$ | ,, |
| 11. | $\{e^{\theta} / \theta \in Q\}$ | ,, |
| 12. | $\{e^{\theta} / \theta \in R\}$ | ,, |
| 13. | $\{xi / x \in R\}$ | சிக்கல் எண்களுக்கான கூட்டல். |
| 14. | காசியன் முழு எண்கள் (Gaussian Integers) அதாவது $\{a+ib / a,b \in Z\}$ | சிக்கல் எண்களுக்கான கூட்டல் |
| | $\{xi / x,$ பூச்சியமல்லாத மெய் எண்$\}$ | சிக்கல் எண்களுக்கான |

| எண் | கணம் | ஈருறுப்புச் செயலி |
|---|---|---|
| 16. | $\{a+ib/a,b\in R; \mid a+ib \mid =1\}$ | சிக்கல் எண்களுக்கான பெருக்கல். |
| 17. | $\{e^{i\theta}/\theta\in R\}$ | ,, |
| 18. | $\{a+ib/a,b\in Q$ $a^2+b^2\neq 0\}$ | ,, |
| 19. | $\{1,i,-1,-i\}$ | ,, |
| 20. | $\{x/x$ ஒரு சிக்கல் எண் $x^n=1\}$ | ,, |
| 21. | $\{(a,b/a,b\in R;\ b\neq 0\}$ | $(a,b)\cdot(c,d)=ad+c,\ bd)$ |
| 22. | X என்பது மூலகத்தை யுடைய கணமாக இருக் போது P (X) | கணத்தின் இணைப்பு ( $\cup$ ) |
| 23. | ,, | கணத்தின் வெட்டு ( $\cap$ ) |
| 24. | ,, | $A\triangle B=(A-B)\ \cup\ (B-A)$ என்று வரையறுக்கப்படும் $\triangle$ என்ற செயலி. [$(A\triangle B)$ $\triangle C$ என்பது A,B,C ஆகிய கணங்களில் ஒன்றில் மட்டும் அல்லது மூன்றிலும் இருக்கும் மூலகங்களால் ஆனது.] |
| 25. | $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)/a_i\in R\}$ | $(a_1,a_2,\ldots,a_n)+(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ $=a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n)$ என்று வரையறுக்கப்படும் + என்ற செயலி. |
| 26. | $\{(a_1,a_2,..,a_n)/a_i\in R;\ a_n=0\}$ | ,, |
| 27. | $\{(a_1,a_2,\ldots a_n)/a_i\in Z\}$ | ,, |
| 28. | $\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_nx^n/$ $a_i\in Z\}$ | $(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(b_0+$ $b_1x+\ldots b_nx^n)=(a_0+b_0)+$ $(a_1+b_1)x+\cdots(a_n+b_n)x^n$ என்று வரையறுக்கப்படும் '+' |
| 29. | $\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n/a_i\in R\}$ | ,, |
| 30. | $\{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n/a_i\in R$ $a_1=a_2=a_3=0\}$ | ,, |

6. ஒரு குழுவில், கொடுத்திருக்கும் இரு மூலகங்கள் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் அவற்றின் எதிர்மறை மூலகங்களும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

7. அத்தியாயம் I, பகுதி 6, பயிற்சி 16-ல் கூறப்பட்டிருக்கும் அட்டவணையிலிருந்து $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_6$ ஆகிய சார்புகள் '.' என்ற வரையறையின் கீழ் ஒரு குழுவை நிர்மாணிக்கின்றன என்று நிரூபிக்க.

8. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்னும் வடிவில் உள்ள பொருட்களுக்கிடையில் (2×2 matrices) $a, b, c, d$ ஆகியவை மெய் எண்களாக இருக்கும்போது] '.' என்ற செயலியை $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ என்று வரையறுத்தால் '.' என்ற செயலியின் கீழ் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ என்னும் மூலகங்கள் ஒரு குழுவை நிர்மாணிக்குமா என்று காண்க.

9. (G,·) என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. G-ன் மூலகங்களுக்கிடையில், என்ற செயலியை $a \odot b = a.b^{-1}$ என்று வரையறுத்தால் $(G, \odot)$ ஒருகுழுவாக இருக்குமா என்பதைக் காண்க. $(G, \odot)$ ஒரு குழுவாக இருக்கவேண்டுமானால் (G,·) எந்த நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருக்கவேண்டும் என்று காண்க.

# 2. குழுவுக்கான மாற்று வரையறைகளும் பெருக்கல் அட்டவணையும்

**(Alternate definitions and multiplication table for a group)**

முன்னர் நாம் நான்கு விதிகளைக் கொடுத்து, இவ் விதிகள் உண்மையாக உள்ள கணித அமைப்பு, குழு என்று குறிப்பிட்டோம். இப்போது நாம் வேறு சில வரையறைகளைக் கொடுத்து அவ்வரையறைகளுக்கு உட்பட்ட கணித அமைப்பு, குழுவாகும் என்று நிருபிக்கப் போகிறோம்.

**2·1. வரையறை:** G என்ற மூலகத்தையுடைய கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '.' என்ற செயலி பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் (G, .) ஒரு குழுவாகும்.

(i) G என்ற கணம் '.'ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) '.' சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

(iii) இடது அலகு (left identity) உள்ளது. அதாவது $e.x = x$ $< x \in G$ என்னும்படியாக $e$ என்ற மூலகம் G-ல் உள்ளது.

(iv) இடது எதிர்மறை மூலகம்: (left inverse) உள்ளது. அதாவது G-ல் உள்ள $x$ என்ற எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் $x_e$ என்னும் ஒரு மூலகம் $x_l.x = e$ என்னும் படியாக உள்ளது.

**நிரூபணம்:** (G, .) ஒரு குழு என்று நிருபிப்பதற்கு வரையறை 1·4-ல் உள்ள நான்கு விதிகளும் உண்மையாயிருக்கின்றன என்று நிருபித்தால் போதும்.

I. G என்ற கணம் '.'-ன்கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(கொடுத்திருப்பது)

II. '.' சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

(கொடுத்திருப்பது)

III. $e$ என்பது $(G,\cdot)$-ன் இடது அலகு என்பதால் $e.x = x$ $\forall\ x \in G$.

இப்பொழுது $x.e = x \quad \forall\ x \in G$ என்று நிரூபிக்கப் போகிறோம்.

$x$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றும் $x'$ என்பது அதன் இடது எதிர்மறை (left inverse) என்றும் எடுத்துக் கொள்க. ... ... ... ... (1)

$x''$ என்பது $x'$-ன் இடது எதிர்மறை என்க ... ... (2)

இப்பொழுது $x''.e = x''\cdot(x'\cdot x)$ ((1) லிருந்து $x'.x = e$)
$= (x''\cdot x')\cdot x$ (சேர்ப்பு விதி)
$= e\cdot x$ ((2) லிருந்து $x''.x' = e$)
$= x$ ($e$ என்பது இடது அலகு)

அதாவது $x''.e = x$ ... ... ... (3)

இப்பொழுது $x\cdot e = (x''.e).e$ ((3) லிருந்து)
$= (x'').(e.e)$ (சேர்ப்பு விதி)

$= x''\cdot e$ ($e$ என்பது இடது அலகு)
$= x$ ((3) லிருந்து)

அதாவது $x.e = x\ \forall\ x \in G$.

எனவே இடது அலகானது வலது அலகாகவும் உள்ளது. அதாவது $x.e = e.x = x \quad \forall\ x \in G$ என்னும்படியாக அலகு ஒன்று G-ல் உள்ளது. ... ... ... ... (4)

IV. இடது எதிர்மறையே வலது எதிர்மறையாகவும் இருக்கும் என்பதைப் பின்வருமாறு காட்டலாம். முன்போலவே $x, x', x''$ ஆகியவற்றை எடுத்துக்கொண்டால் (3) லிருந்து $x''.e = x$. இதில் இடப்புறத்தை (4) ஐ உபயோகித்துச் சுருக்கினால் $x'' = x$ ... (5)

ஆனால் $x''$ என்பதை நாம் $x'$-ன் இடது எதிர்மறையாக எடுத்தோம். எனவே $x''.x' = e$. எனவே (5) ஐ உபயோகித்தால் $x.x' = e$.

அதாவது $x$-ன் இடது எதிர்மறை $x'$ என்றால், $x$ என்பது $x'$-ன் இடது எதிர்மறையாக உள்ளது. அதாவது $x \in G$ என்ற எந்த மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் $x.x' = x'.x = e$ என்னும் படியாக $x'$ என்ற எதிர்மறை மூலகம் G-ல் உள்ளது.

I, II, III, IV ஆகியவற்றிலிருந்து (G, . ) ஒரு குழுவாகும்.

**2·2.** வரையறை : G என்ற மூலகத்தையுடைய கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ‘ . ’ என்ற செயலி பின்வரும் குணங்களுக்கு உட்பட்டிருந்தால் (G, . ) என்பது ஒரு குழுவாகும்.

(i) G என்ற கணம் ‘ . ’ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) ‘ . ’ என்பது சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

(iii) வலது அலகு (right identity) உள்ளது.

(iv) வலது எதிர்மறை மூலகங்கள் (left inverses) உள்ளன.

[இதையும் முன்போலவே நிருபிக்க.]

**2·3.** வரையறை : G என்ற மூலகத்தையுடைய கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ‘ . ’ என்ற ஈருறுப்புச் செயலி பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் (G, . ) ஒரு குழுவாகும்.

(i) G என்ற கணம் ‘ . ’-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) ‘ . ’ சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டுள்ளது.

(iii) $x.a = b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $a$, $b$ என்பவை G-ன் எந்த இரு மூலகங்களாக இருக்கும்போதும் தனித்த மூலம் (Unique sotution) உள்ளது.

(iv) $a.y = b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு, $a, b$ என்பவை G-ன் எந்த இரு மூலகங்களாக இருக்கும்போதும் தனித்த மூலம் உள்ளது.

நிரூபணம் : அலகைக் கண்டெடுத்தல் :

$g$ என்பது $G$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$x.g = g$ என்ற சமன்பாட்டின் தனித்த மூலத்தை $e$ என்க. $e$ என்பது இடது அலகு என்பதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம். $b$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. எனவே (iv)-ன்படி $g.x = h$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு $x$ என்ற தனித்த மூலகம் ஒன்று $G$-ல் உள்ளது.

$g.x = h$-ன் இருபுறத்திலும் $e$ ஆல் செயல் நிகழ்த்தும்போது,

$e.(g.x) = e.h$

அதாவது $(e.g).x = e.h$ (சேர்ப்பு விதி)

அதாவது $g.x = e.h$

($e$ என்பது $x.g = g$-ன் மூலம் என்று எடுத்தோம்.)

ஆனால் $gx = h$.

$\therefore h = e.h \quad \forall h \in G$.

எனவே $e$ என்பது இடது அலகாகும். (1)

மேலும் $x.a = b$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தனித்த மூலம் இருப்பதால் $x.a = e$ என்ற சமன்பாட்டிற்கும் தனித்த மூலம் இருக்கும். அதாவது $a$ என்பது $G$-ன் எந்த மூலகமாக இருப்பினும் $x$ என்ற ஒரு மூலகம் $x.a = e$ என்னும்படியாக $G$-ல் உள்ளது. அதாவது G-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் இடது எதிர்மறை (left inverse) உள்ளது. (2)

அதாவது (G, . ) என்ற கணித அமைப்பு வரையறை 2·1-க்கான நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டுள்ளது. எனவே, (G, . ) ஒரு குழுவாகும்.

2·4 வரையறை : $G$ என்பது மூலகத்தைக் கொண்ட முடியும் கணம் (finite non-empty set) என்க. $G$-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '·'-என்ற ஈருறுப்புச் செயலி பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் $(G, .)$ ஒரு குழுவாகும்.

(i) $G$-என்ற கணம் '·'-கீழ் அமைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) '·' சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டுள்ளது.

(iii) $a.x = a.y \Longrightarrow x = y \quad \forall a, x, y \in G$

(iv) $x.b = y.b \Longrightarrow x = y \quad \forall b, x, p \in G$.

நிரூபணம்: இதை நிரூபிப்பதற்கு, $a$, $b$ என்பவை $G$-ன் எந்த இரு மூலகங்களாக இருப்பினும் $a.x = b$, $x.a = b$ ஆகிய இரண்டு சமன்பாடுகளுக்கும் தனித்த மூலகங்கள் உள்ளன என்று முதலில் காண்பிப்போம். பின்னர் வரையறை 2·3-லிருந்து $(G, .)$ ஒரு குழு என்பதைத் தெளிவாகக் கூறிவிடலாம்.

$G$ என்பது ஒரு முடியும் கணமாகையால் $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ என்று எழுதிவிடலாம். இப்போது $a_i x = a_j$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தனித்த மூலம் உள்ளது என்று காட்ட : (1)

$A = \{a_i a_1, a_i a_2, \ldots, a_i a_n\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். $A$-ல் உள்ள $n$ மூலகங்களும் $G$-ல் உள்ளன. (G என்பது '·'-ன்கீழ் அடைக்கப்பட்டிருப்பதால்) (2)

மேலும் இவை அனைத்தும் வித்தியாசமானவை. ஏனெனில் $a_i\ a_t = a_i\ a_s \Longrightarrow a_t = a_s$ (விதி மூன்றின்படி) (3)

$G$-யிலும் $n$ மூலகங்களே உள்ளன. எனவே (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $A = G$.

$\therefore\ a_j \in G \Longrightarrow a_j \in A$.

எனவே $a_i . a_m = a_j$ என்னும்படியாக $a_i . a_m$ என்ற மூலகம் $A$-ல் உள்ளது. அதாவது $a_i\ a_m = a_j$ என்னும்படியாக $a_m$ என்ற தனித்த (Uuique) மூலகம் G-ல் உள்ளது. எனவே (1) லிருந்து $a_i x = a_j$ என்ற சமன்பாட்டிற்குத் தனித்த மூலம் உள்ளது என்பது விளங்கும். (4)

இதுபோல் $a_p, a_q$ என்பவை $G$-லிருந்தால் $xa_p = a_q$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $G$-ல் தனித்த மூலம் உள்ளது என்று நிரூபிக்கலாம். (5)

(i), (ii), (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து (வரையறை 2·3-ன்படி) $(G, .)$ ஒரு குழு.

குறிப்பு 1. மேலே கொடுத்துள்ள நிருபணத்தில் நாம் $A$ என்ற ஒரு கணத்தை எடுத்துக்கொண்டு பின்னர் $A = G$ என்று நிரூபித்தோம். இதைப்போன்ற ஒரு முறையை முன்னர் 'முடியும் குழுவிலுள்ள எந்த ஒரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் முடியும் எண்' என்னும் குணத்தை நிரூபிக்கும்போது பயன்படுத்தினோம். இம்முறை முடியும் குழுக்களைப் பற்றிப் படிக்கும்போது அதிகமாகப் பயன்படும் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

குறிப்பு 2. மேற்கூறிய வரையறை முடியாக் கணத்தைப் பொறுத்த வரையில் சரியல்ல. எடுத்துக்காட்டாக $N$ என்ற இயற்கை எண்களின் (Natural numbers) கணமானது '+' என்ற ஈருறுப்புச் செயலின்கீழ் வரையறை 2·4-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனைகள் அனைத்திற்கும் உட்பட்டிருக்கிறது. ஆனால் $(N, +)$ ஒரு குழு அல்ல.

குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணை (Multiplication table of a group)

ஒரு முடியும் குழுவில் உள்ள மூலகங்கள் கொடுத்துள்ள ஈருறுப்புச் செயலியின்படி எவ்வாறு இணைகின்றன என்பதை விளக்குவது பெருக்கல் அட்டவணை (Multiplication table) ஆகும். (எடுத்துக்கொண்ட செயலி எதுவாயிருப்பினும் குழுவின் அட்டவணையை பெருக்கல் அட்டவணை குறிப்பிடுகின்றோம்) இது, நிரைகள் (rows) எனப்படும் கிடை வரிசைகளையும், நிரல்கள்

(columns) எனப்படும் நிலை வரிசைகளையும் கொண்ட சதுர அட்ட வணை ஆகும். கிடை வரிசை, நிலை வரிசை ஆகியவற்றின் தலைப்பில் குழுவின் மூலகங்களை ஏதேனும் ஒரு வரிசையாக (order) எழுத வேண்டும். இவ்வாறாக $\{a, b, c, d\}$ என்ற கணம் '·' என்ற செயலின்கீழ் குழுவாக இருந்தால் அதன் பெருக்கல் அட்டவணை யை அமைப்பதற்கு முதலில்

| $\odot$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | | | | ⋮ | |
| $b$ | | | | ⋮ | |
| $c$ | ...... | ...... | ...... | ... | |
| $d$ | | | | | |

என்பதை அமைக்கவேண்டும். குழுவிலுள்ள அலகை முதலில் குறிப்பிடுவது வழக்கம். அதாவது '$a$' இருக்கும் இடத்தில் குழுவின் அலகு வரவேண்டும். நிரைகள்,—நிரல்கள் ஆகியவற்றின் பொதுத் தலைப்பில் குழுவிலுள்ள செயலி (Operation) ஐக் குறிப்பிடுவது வழக்கம். இங்கு '.' செயலியாதலால் அதைக் குறிப்பிட்டுள்ளோம். இப்போது $c$ என்ற மூலகத்தைத் தலைப்பில் கொண்ட நிரைக்கும், $d$ என்ற மூலகத்தைத் தலைப்பில் கொண்ட நிரலுக்கும் பொதுவாக உள்ள இடத்தில் $c.d$-ன் மதிப்பை எழுதுகின்றோம். இவ்வாறாக அட்டவணையில் உள்ள எல்லா இடங்களையும் நிரப்புகின்றோம்.

$(Z_5, +)$ என்ற குழுவிற்கான அட்டவணையைத் தயாரிப்போம். இக் குழுவில் $0, 1, 2, 3, 4$ என்று 5 மூலகங்கள் இருக்கும். இவ்

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் இடது எதிர்மறை உள்ளது என்பதைக் காட்டும். மேலும் ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகத்தின் வலது எதிர்மறையும் இடது எதிர்மறையும் ஒன்றுதான் என்பதையும் சரி பார்த்துக் கொள்ளலாம்.

பெருக்கல் அட்டவணையில் மேல் இடப் புறத்திலிருந்து (Top left), கீழ் வலப் புறத்திற்கு (Bottom right) வரும் மூலகங்களின் வரிசையை மூலை விட்டம் (Diagonal) என்கிறோம். மூலை விட்டத்தில் $\{a^2/a \in G\}$ என்ற மூலகங்களே அடங்கியுள்ளன. $(Z_5, +)$ உதாரணத்தில் $\left\{ a+a \middle/ a \in Z_5 \right\}$ என்ற மூலகங்கள் மூலை விட்ட மூலகங்களாக (Diagonal elements) உள்ளன.

$(Z_5, +)$-க்கு நாம் கொடுத்திருக்கும் அட்டவணை மூலை விட்டத்தின் இருபுறங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக உள்ளது (Symmetric about the diagonal). இது $a.b = b.a$ என்பதை உணர்த்துகின்றது. எனவே அட்டவணையானது இவ்வாறு மூலை விட்டத்தின் இருபுறங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருந்தால் அது குறிப்பிடும் குழு, பரிமாற்றுக் குழுவாக இருக்கும். இதுபோல் பரிமாற்றுக் குழுவைக் குறிப்பிடும் அட்டவணையானது மூலை விட்டத்தின் இரு புறங்களிலும் ஒரேமாதிரியாக இருக்கும். [அட்டவணை, மூலை விட்டத்தின் இரு புறங்களிலும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கிறது என்பதற்கு "$i^{th}$ row $j^{th}$ column த்தில் உள்ள நிரப்பி (entry)யும், $j^{th}$ row $i^{th}$ columnத்தில் உள்ள நிரப்பியும் ஒன்றனவை" என்பதுதான் பொருள்.]

மேலும் பெருக்கல் அட்டவணையில், அலகானது மூலை விட்டத்திலோ அல்லது இரண்டிரண்டாக மூலை விட்டத்தின் இரண்டு பக்கங்களிலும் ஒரே மாதிரியான இடங்களிலோ இருப்பதைக் காணலாம். இது ஒவ்வொரு மூலகமும் தன்னுடைய எதிர்மறையுடன் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டுள்ளது என்பதைக் குறிக்கும். [அதாவது "$i^{th}$ row $j^{th}$ column த்தில் அலகு இருந்தால் $j^{th}$ row $i^{th}$ column த்திலும் அலகுதான் இருக்கும்."]

இன்னும் நாம் அட்டவணையைக் கவனிக்குங்கால் எந்தக் கிடை வரிசையை நோக்கினும் அதில் குழுவில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் இருப்பதோடு ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒரே ஒரு தடவையே இருக்கிறது. இதைப் பின்வருமாறு விளக்கலாம். $\left\{ ax \middle/ x \in G \right\}$ என்னும் மூலகங்களே $a$ என்னும் மூலகத்தைத் தலைப்பில் கொண்ட கிடை வரிசையில் இருக்கும். அவற்றுள் இரண்டு மூலகங்கள் ஒன்று

யிருக்கின்றன என்பது $ax=ay$ என்பதைக் கொடுக்கும். ஆனால் $ax=ay \Longrightarrow x=y$ (இடது நீக்கல் விதி). எனவே இரண்டு மூலகங்கள் ஒரு நிரையில் ஒன்றாக இருக்க முடியாது. மேலும் ஒவ்வொரு நிறையிலும் குழுவில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை மூலகங்கள் இருப்பதால் "குழுவில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் ஒவ்வொரு நிரையிலும் உள்ளன." இதுபோல் குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையில் ஒவ்வொரு நிரலிலும் குழுவில் உள்ள எல்லா மூலகங்களும் இருப்பதோடு ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒரே ஒரு தடவையே இருக்கும்

## பயிற்சி

1. $(G, \cdot)$ ஒரு குழு என்க. $A \subset G$ என்க.

   $a, b \in A \Longrightarrow a \cdot b^{-1} \in A$ என்றால், $(A, \cdot)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க.

2. $(G, \cdot)$ ஒரு குழு என்றும், $A \subset G$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

   $a, b \in A \Longrightarrow a^{-1} \cdot b \in A$ என்றால் $(A, \cdot)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க.

3. $(G, \cdot)$ ஒரு முடியும் குழு என்றும் $A \subset G$ என்றும் வைத்துக் கொள்க.

   $a, b \in A \Longrightarrow a.b \in A$ என்றால் $(A, \cdot)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க. (வரையறை 2·4-ஐ அடுத்துள்ள குறிப்பு 1 ஐ உபயோகிக்க முடியும்.)

4. பின்வரும் சமன்பாடுகளுக்குக் கொடுத்துள்ள குழுக்களில் தீர்வு காண்க.

   (i) $(Z_5, +)$ –ல் $x+3=1$
   (ii) $(Z_5, +)$ –ல் $4+x$ $3$
   (iii) $(Z_7-\{0\}, .)$ ·ல் $4 . x=3$
   (iv) $(Z_{11}-\{0\}, .)$ -ல் $x . 8=3$

5. $(G, \cdot)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. இப்பொழுது G-ல் $\odot$ என்னும் செயலியை $a \odot b = b \cdot a$ என்று வரையறுத்தால் $(G, \odot)$ ஒரு குழுவா என்பதைக் காண்க. [உண்மையில் $(G, \odot)$ ஒரு குழுவாக இருக்கும்; இதிலிருந்து ஒரு குழுவிலிருந்து இன்னொரு குழுவை நிர்மாணிக்கலாம் என்பது விளங்கும்.]

6. $(G, \cdot)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. இப்போது, G-ல் '$\times$' என்ற செயலியை $a \times b = a^2 . b$ என்று வரையறுத்தால் $(G, \times)$ ஒரு குழுவா என்பதைக் காண்க.

7. பயிற்சி 6-ல் $a \times b = a . b^2$ என்று வரையறுத்தால் $(G, \times)$ ஒரு குழுவா என்பதைக் காண்க.

8. $(G, \cdot)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்றும், $p$ என்பது G-ல் உள்ள குறிப்பிட்ட ஒரு மூலகம் (given fixed element of G) என்றும் எடுத்துக் கொள்க. [p] என்னும் செயலியை $a\,[p]\,b = a.b.p$ என்று வரையறை செய்தால் $(G, [p])$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்று நிரூபிக்க.

குறிப்பு: இவ்விதமாக ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் ஒரு குழுவை இணைக்க முடிகிறது. இக் குழுக்களின் கணத்தை E(G) என்போம். G-லிருந்து E(G)-க்கு $x \longrightarrow (G,[x])$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பை வரையறுக்கலாம். E(G)-ல் நாம் $*$ என்னும் ஈருறுப்புச் செயலியை $(G, [x]) * (G,[y]) = (G, [x,y])$ என்று வரையறுத்தால் $(E(G),*)$ ஒரு குழு என்று நிரூபித்துவிடலாம். மேலும் $(G, \cdot)$-ம் $(E(G), *)$-ம் அமைப்பில் ஒன்றுனவை (isomorphic) என்றும் நிரூபிக்கலாம். [அமைப்பில் ஒன்றுனவை என்பதைப் பின்னர் படிப்போம்.] அதாவது "ஒவ்வொரு பரிமாற்றுக் குழுவும், குழுக்களை மூலகங்களாகக்கொண்ட ஒரு குழுவுடன் அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்கும்" எனலாம்.

9. 'O' என்பது G என்ற கணத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க G-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '.' என்ற ஈருறுப்புச் செயலி,

(i) G என்ற கணம் '$\cdot$'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது;

(ii) $(a.b)\,c = a.(b.c)$; (சேர்ப்பு விதி)

(iii) $(G - \{\ \}, \cdot)$ ஒரு குழு

என்னும் மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டிருந்தால் "$a.0 = 0 \;\forall\; a \in G - \{0\}$ அல்லது $a\,c \neq 0 \;\forall\; a \in G - \{0\}$ என்று நிரூபிக்க.

நிருபணம்: $G - \{0\}$ ஐ $G'$ என்று குறிப்பிடுவோம்.

$a.0 = 0 \;\forall\; a \in G'$ என்றால் நாம் நிரூபிக்க வேண்டியது எதுவுமில்லை.

$p.0 \neq 0$ என்னும்படியாக $p$ என்ற மூலகம் $G'$-ல் இருக்கிறது என்க.

இப்போது $p \cdot 0 = k$ என்க. ... ... (1)

$\therefore \; k \in G'$ ... ... ... (2)

$p^{-1}$ என்பது $(G', \cdot)$ என்ற குழுவில் (iii-லிருந்து) $p$-ன் எதிர்மறை என்றும், $e$ என்பது $(G', \cdot)$-ன் அலகு என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$\therefore$ (1)-லிருந்து $p^{-1} \cdot (p \cdot 0) = p^{-1} \cdot k$

அதாவது $(p^{-1} \cdot p) \cdot 0 = p^{-1} \cdot k$ சேர்ப்பு விதியை உபயோகித்து)

அதாவது $e.0 = p^{-1}. k$ (3) ($e$ என்பது $(G', .)$-ன் அலகு)

$a$ என்பது $G'$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இப்போது (3)-லிருந்து $a.(e.0) = a \cdot p^{-1} \cdot k)$

அதாவது $(a.e) .0 =$ G. $(p^{-1} k)$ (சேர்ப்பு விதிப்படி)

அதாவது $a.0 = a.(p^{-1}.k)$ ($e$ என்பது $(G', .)$-ன் அலகு)
$a, p', k$ ஆகிய மூன்றும் $G'$-ன் மூலகங்கள். மேலும் $(G', .)$ ஒரு குழுவாகும். எனவே $a \cdot (p^{-1}.k) \in G'$. அதாவது $a.(p^{-1}.k) \neq 0$.
$\therefore a . 0 \neq 0 \;\forall\; a \in G'$.

எனவே "$a \cdot 0 = 0 \;\forall\; a \in G'$ அல்லது $a \cdot 0 \neq 0 \;\forall\; a \in G'$". என்பது விளங்கும்.

குறிப்பு: பயிற்சி 9-ல் கொடுத்துள்ள (i), (ii), (iii) ஆகிய மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டு கணித அமைப்புகள் இருக்கின்றன என்பதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்கும்.

1. $\{0, 1, 2\}$ என்ற கணத்தில்

| * | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 1 | 1 |

என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள * என்ற செயலி.

2. $\{0, 1, 2\}$ என்ற கணத்தில்

| • | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

என்று வரையறுக்கப் பட்டுள்ள. '•' என்ற செயலி.]

10. G என்பது மூலகத்தையுடைய கணம் என்க. G-ல் வரையறுக்கப்பட்டுள்ள '•' என்ற ஈருறுப்புச் செயலி பின்வரும்

விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் (G, .) ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க.

(i) G என்ற கணம் '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) '.' சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

(iii) $\left\{ g \cdot a \middle/ g \in G \right\} = \left\{ a \cdot g \middle/ g \in G \right\} = G$ என்பது G-ல் உள்ள $a$ என்ற எந்த ஒரு மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் உண்மையாக இருக்கும்.

($px = q$, $xp = q$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்கள் உள்ளன என்பதைக் காட்டலாம். பின்னர் வரையறை 2·3-க்குக் கொடுத்திருப்பது போன்ற நிரூபணத்தைக் கொடுக்க முயற்சிக்கலாம்.

11. குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையின் குணங்களிலிருந்து பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ({1, 2, 3, 4, 5, 6}, + ) என்பது குழுவா என்பதைக் காண்க.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 6 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 2 | 6 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 1 | 6 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 6 | 6 | 3 | 2 | 5 | 1 | 4 |

# 3. உட்குழுக்களும் வட்டக் குழுக்களும்

## (Sub-groups and Cyclic groups)

**3·1. வரையறை :** $(G, .)$ என்பது ஒரு குழு என்க. A என்பது G-ன் உட்கணம் என்க. $(A, .)$ ஒரு குழுவாக இருந்தால் இதை $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழு (Sub-group) என்கிறோம்.

$(G, .)$ என்ற குழுவுக்கு $e$ என்பது அலகாக இருந்தால் $(\{e\} .)$ என்பதுவும், $(G, .)$ என்பதுவும், எப்பொழுதுமே $(G, .)$-ன் உட்குழுக்களாக இருக்கும். ஆனால் இவைகளை முறையற்ற உட்குழுக்கள் (Improper sub-groups) என்பது வழக்கம். $\{e\} \subset H \subset G$ என்னும்படியாக $(H, .)$ என்பது உட்குழுவாக இருந்தால் இது முறையான உட்குழு (Proper sub-group) எனப்படும்.

**3·2. எ. கா. :** $(Z, +)$ என்ற குழுவுக்கு $(2\mathbb{Z}, +)$, $(3\mathbb{Z}, +)$ ஆகியவை உட்குழுக்களாகும் ($m\mathbb{Z}$ என்பது $\{\ldots -2m, -m, 0, m, 2m, 3m, \ldots\}$ என்னும் கணத்தைக் குறிக்கும்.) இவ்வாறாக $m$ என்பது முழு எண்ணாக இருக்கும்போது $(m\mathbb{Z}, +)$ என்பது $(Z, +)$-ன் உட்குழுவாகும்.

**3·3. எ.கா. :** $(R, +)$ என்ற மெய் எண்களின் குழுவுக்கு, $(Q, +)$, $(Z, +)$ ஆகியவை உட்குழுக்களாகும்.

**குறிப்பு 1 :** ஒரு குழுவில் உள்ள செயலியும் அதன் உட்குழுவிலுள்ள செயலியும் ஒன்றாக இருக்கவேண்டும் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. எடுத்துக்காட்டாக $(Z_7 - \{0\}, \cdot)$ என்ற குழு $(Z_7, +)$ என்ற குழுவின் உட்குழு அல்ல.

**குறிப்பு 2:** முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு குழுவிற்கு முடியும் அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு முறையான உட்குழு இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, Q என்பது விகிதமுறு எண்களின் கணம் என்றால் $(Q - \{0\}, .)$ ஒரு குழுவாகும். இக்

குழுவில் முடியா அளவு மூலகங்கள் உள்ளன. இக்குழுவிற்கு $(\{1,-1\},\cdot)$ என்பது முறையான உட்குழுவாகும். இதில் இரண்டே மூலகங்கள்தாம் உள்ளன.

குறிப்பு 3: பரிமாற்றுக் குழு அல்லாத ஒரு குழுவின் உட்குழு பரிமாற்றுக் குழுவாகவும் இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக, அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள 6 என்ற பரிமாணத்தை உடைய குழு பரிமாற்றுக் குழு அல்ல. ஏனெனில் $y.a \neq a.y$. ஆனுல் இதன் உட்குழுவாகிய $(\{e, a, a^2\},\cdot)$ என்பது பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

| $\cdot$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $a^3$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $x$ | $a^2$ | $e$ | $a$ |
| $x$ | $z$ | $x$ | $y$ | $a$ | $a^2$ | $e$ |

குறிப்பு 4: ஒரு குழுவின் உட் குழுவிற்கும் உட்குழு இருக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $(2\mathbb{Z}, +)$ என்பது $(\mathbb{Z},+)$-ன் உட்குழு $(4\mathbb{Z}, +)$ என்பது இந்த $(2\mathbb{Z}, +)$-க்கு உட் குழுவாகும்.

**3·4. தேற்றம்:** $(H, \cdot)$ என்பது $(G, \cdot)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்றால்,

(i) $(G, \cdot)$-ன் அலகு $(H, \cdot)$-ன் அலகாக இருக்கும்.

(ii) H-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும், $(G, \cdot)$-ல் உள்ள எதிர்மறையே $(H, \cdot)$லும் எதிர்மறையாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** $e, e_1$ என்பவை முறையே, $(G, .)$, $(H, .)$ ஆகியவற்றின் அலகுகள் என்க.

$x \in H$ என்றால், $e_1 . x = x$

மேலும், $x \in H \Longrightarrow x \in G \Longrightarrow e.x = x$

$\therefore \; e_1 . x = e.x \Longrightarrow e_1 = e$

(குழுவிற்கான வலது நீக்கல் விதிப்படி

எனவே, (i) நிரூபிக்கப்பட்டது.

இனி, $y \in H$ என்னும் மூலகத்திற்கு, $y^{-1}$, $y_1$ ஆகியவை முறையே, (G, .), (H, .) ஆகிய குழுக்களில் எதிர்மறைகள் என்க.

$$\therefore \quad x^{-1}.x = e$$

$$x_1 \cdot x = e_1 = e$$

$$\therefore \quad x^{-1}.x \quad x_1.x \Longrightarrow x^{-1} \cdot x_1$$ (குழுவிற்கான வலது நீக்கல் விதிப்படி)

எனவே, (ii) நிரூபிக்கப்பட்டது.

H என்பது G-ன் உட்கணம் என்க. (H, •) என்பது (G, •) என்ற குழுவின் உட்குழுவா என்று கண்டுபிடிப்பதற்குச் சில இலகுவான வழிகள் உள்ளன. அவற்றைப் பின்வரும் தேற்றங்கள் விளக்குகின்றன.

**3·5. தேற்றம் :** (G, .) ஒரு குழு என்றும், H என்பது G–ன் உட்கணம் என்றும் எடுத்துக்கொள்க. (H, .) என்பது (G, .)-ன் உட்குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை, "$a, b \in H \Longrightarrow a.b^{-1} \in H$" என்பதாகும்.

**நிரூபணம் :** I. தேவையானது என்று காட்ட,

(H, .), (G, .)-ன் உட்குழு என்க.

$a,b \in H \Longrightarrow b^{-1} \in H.$

இப்பொழுது $a, b^{-1} \in H \Longrightarrow ab^{-1} \in H.$

((H, •)) குழுவாகையால் H, '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டிருக்கும்.)

அதாவது, $a,b \in H \Longrightarrow a \cdot b^{-1} \in H.$

II. போதுமானது என்று காட்ட :

$a,b \in H \Longrightarrow a \cdot b^{-1} \in H$ என்க.

$g$ என்பது H-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இப்பொழுது $g, g \in H \Longrightarrow g \cdot g^{-1} \in H \Longrightarrow e \in H \quad \ldots \quad (1)$

($e$ என்பது (G, •)-ன் அலகு என்றால்)

இப்பொழுது $x \in H$ என்றால், $e, x \in H$

$$\therefore \; e.x^{-1} \in H \Longrightarrow x^{-1} \in H.$$

அதாவது, H-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் எதிர்மறையும் H-ல் உள்ளது. மேலும் $a, b \in H$ என்க. ... ... ... (2)

$b \in H \Longrightarrow b^{-1} \in H$ (2)-லிருந்து

இப்பொழுது $a, b^{-1} \in H \Longrightarrow a.(b^{-1})^{-1} \in H$

ஆனால் $(b^{-1})^{-1} = b$.

$\therefore \; a, b \in H \Longrightarrow a.b \in H.$ ... ... ... ... (3)

G-ல் உள்ள மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதி (Associative law)க்கு உட்பட்டிருப்பதாலும், $G \subseteq H$ என்பதாலும் H-ன் மூலகங்களும் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... ... (4)

(3), (4), (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து (H, . ) ஒரு குழுவாகும். எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**3·6 தேற்றம் :** (G, · ) என்பது முடியும் குழு என்க. $H \subset G$ என்க. (H, . ) என்பது (G, . )-ன் உட்குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை "$a, b \in H \Longrightarrow a.b \in H$" என்பதாகும்.

**நிரூபணம் :** I. தேவையானது என்று காட்ட,

(H, · ) ஒரு குழு என்க.

$\therefore$ H என்ற கணம் '.' என்ற செயலின் கீழ் அடைக்கப்பட்டிருக்கும். அதாவது $a, b \in H \Longrightarrow a \cdot b \in H$.

II. போதுமானது என்று காட்ட :

$a, b \in H \Longrightarrow a.b \in H$ என்க. ... ... (1)

$H \subset G$ என்பதாலும், G-ல் உள்ள மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருப்பதாலும் H-ன் மூலகங்களும் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... ... ... (2)

$a$ என்பது H-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$H \subset G$ என்பதால் $a \in G$. மேலும் (G, . ) ஒரு முடியும் குழு. எனவே குணம் 1·27–லிருந்து $a^k = e$ என்னும்படியாக $k$ என்ற நேர்த்திசை முழு எண் உள்ளது ($e$ என்பது (G, . )-ன் அலகு.)

$a \in H$ என்பதிலிருந்து $a^r \in H \ \forall \ r \in N$ ((1)-லிருந்து.)

$\therefore a^k = e \in H.$

அதாவது (G, . )-ன் அலகு H-லும் உள்ளது. ... (3)
G-ல் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருப்பதால், H-லும் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருக்கும். $H = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ என்க. $a_k$ என்பது H-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$a_k H = \{a_k a_1, a_k a_2, \ldots\ldots a_k a_n\}$ என்க.

$a_k$ H-ன் மூலகங்கள் அனைத்தும் H-ன் மூலகங்கள். ((1)-லிருந்து.)

மேலும் $a_k$ H-ல் எவையேனும் இரண்டு மூலகங்கள் சமமாக இருக்க முடியாது. ($\because$ இவை அனைத்தும் (G,.)-ன் மூலகங்களாக இருப்பதால், இடது நீக்கல் விதியை உபயோகிக்கும்போது $a_k a_i = a_k a_j \implies a_i = a_j$ என்று கிடைத்துவிடும்.) மேலும் $a_k$H-ல் $n$ மூலகங்கள் உள்ளன. எனவே $H = a_k H$. எனவே $a_k a_j = e$ என்னும்படியாக $a_j$ என்ற மூலகம் H-ல் உள்ளது. இப்பொழுது $a_k a_j$ ஆகியவற்றை (G, .)-ன் மூலகங்கள் என்று பார்க்குங்கால் $a_k$-ன் எதிர்மறை மூலகம் H-ல் உள்ளது. அதாவது H-ன் மூலகம் ஒவ்வொன்றிற்கும் எதிர்மறை மூலகம் H-ல் உள்ளது. ... (4)

(1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து (H, .) ஒரு குழுவாகும்.
இவ்வாறு தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

3·7. தேற்றம்: (A, . ), (B, . ) ஆகிய இரண்டும் (G, . ) என்ற குழுவின் உட்குழுக்களாக இருந்தால் $(A \cap B, .)$ என்பதுவும் (G, . )-ன் உட்குழுவாகும்.

நிரூபணம்: $x, y \in A \cap B$ என்க.

இப்பொழுது $x, y \in A$; (A, . ) ஓர் உட்குழு.

$\therefore \ x, y^{-1} \in A.$ (தேற்றம் 3·5. லிருந்து)

மேலும் $x, y \in B$; (B, . ) ஓர் உட்குழு

$\therefore \quad x, y^{-1} \in B$ (தேற்றம் 3·5-லிருந்து)

இவ்வாறு $x, y \in A \cap B \Longrightarrow x.y^{-1} \in A \cap B$

எனவே தேற்றம் 3·5-லிருந்து $(A \cap B, .)$ ஓர் உட்குழுவாகும்.

**கிளைத் தேற்றம் :** $(A_i, .)$ ; $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$ என்பவை $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழுக்கள் என்றால் $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i, .\right)$ என்பதுவும் $(G, .)$-ன் உட்குழுவாகும். இதுபோலவே முடியா அளவு உட்குழுக்களின் வெட்டும், உட்குழுவாகவே இருக்கும்.

குறிப்பு : $(A, .), (B, .)$ ஆகிய இரண்டும் $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழுக்கள் என்றால் $(A \cup B, .)$ என்பது உட்குழுவாக இருக்கவேண்டும் என்பதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக, $(2\mathbb{Z}, +)$, $(3\mathbb{Z}, +)$ ஆகியவை $(\mathbb{Z}, +)$-ன் உட்குழுக்களாகும். ஆனால் $(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}, +)$ என்பது ஒரு குழு அல்ல. ஏனெனில் $2 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, $3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ ; ஆனால் $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

## வட்டக் குழுக்கள் (Cyclic groups)

**3·8. வரையறை :** $a$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $[a]$ என்பது $a$ ஐ மூலகமாகக் கொண்ட $(G, .)$-ன் உட்குழுக்களில் மிகவும் சிறியது என்க. இப்பொழுது $[a]$ என்னும் குழு '$a$' என்ற மூலகத்தினால் உருவாக்கப்படுகிறது (generated by '$a$') எனப்படும். '$a$' என்ற மூலகம் இவ்வுட்குழுவின் உருவாக்கி (generator) எனப்படும்.

இதே வரையறையை வேறுவிதமாக "$[a]$ என்பது $a$ என்ற மூலகத்தைத் தன்னுட்கொண்ட $(G, .)$-ன் உட்குழுக்களின் வெட்டு (intersection of the sub groups containing a)" என்றும் கூறலாம். $a$-யினால் உருவாக்கப்படும் குழுவை $<a>$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு.

**3·9. எ.கா :** $(\mathbb{Z}, +)$ என்ற குழுவில் 1 என்னும் மூலகத்தினால் உருவாக்கப்படும் குழுவைப் பார்ப்போம்.

$[1]$-ல் 1 என்ற மூலகம் இருப்பதால், $1 + 1, (1+1) + 1, \ldots\ldots$ ஆகிய மூலகங்கள் அனைத்தும் இருக்கும். அதாவது $[1]$-ல் $2, 3, 4 \ldots$ ஆகிய மூலகங்கள் இருக்கும். மேலும் $1, 2, 3, 4, \ldots$ ஆகியவை இருப்பதால் அவற்றின் எதிர்மறைகளான $-1, -2, -3, -4, \ldots$ ஆகியவையும் இருக்கும். இவ்வாறு முழு எண்கள் அனைத்தும் $[1]$-ல் இருக்கும். எனவே $[1] = <1> = (\mathbb{Z}, +)$.

**3·10. எ. கா.:** $(Z, +)$ என்ற குழுவில் $<2> = (2Z, +)$

**3·11. வரையறை:** $(A, \cdot)$ ஒரு குழு என்றும் $A \subset G$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க. "A-ன் மூலகங்களனைத்தையும் தன்னுள்ளே கொண்ட $(G, .)$-ன் உட்குழுக்களின் வெட்டு (Intersection)," A என்ற கணத்தினுல் உருவாக்கப்படும் உட்குழு எனப்படும். இதை [A] என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

வேறுவிதமாக "[A] என்பது A என்ற கணத்தை உட்கணமாகக் கொண்ட மிகச்சிறிய உட்குழு" எனலாம். இதையே $<A>$ என்றும் குறிப்பிடுவதுண்டு. இம்முறைப்படி $a, b$ ஆகிய மூலகங்களால் உருவாக்கப்படும் உட்குழுவை $<a, b>$ என்று குறிப்பிடலாம்

**3·12. எ. கா.:** $(Z, +)$ என்னும் குழுவில் $<2, 6> = <2> = (2Z, +)$. மேலும் $<6, 8> = (2Z, +)$.

**3·13. வரையறை:** $(G, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. $<a> = (G, .)$ என்னும்படியாக $a$ என்ற மூலகம் G-ல் இருக்குமாயின் $(G, .)$ என்பது வட்டக் குழு (Cyclic group) எனப்படும். '$a$' என்ற மூலகம் இதன் உருவாக்கி (Generator) எனப்படும்.

**3·14. எ.கா.:** $(Z, +)$ என்னும் குழுவில் $<1> = (Z, +)$ என்னும்படியாக 1 என்ற மூலகம் உள்ளது. (எ.கா. 1·9-ல் நிரூபித்துள்ளோம்) எனவே, $(Z, +)$ என்பது வட்டக் குழுவாகும். இது முடியா வட்டக் குழுவாகும் (Infinite cyclic group.)

**3·15. எ. கா.:** $(\{1, i, -1, -i\}, .)$ என்ற குழுவை எடுத்துக் கொள்க. $i$ என்ற மூலகம் இக்குழுவை உருவாக்குவதால் இது வட்டக் குழுவாகும். இது முடியும் பரிமாணத்தைக் கொண்ட வட்டக் குழுவாகும்.

**3·16. எ. கா.:** $(Q, +)$ என்பது வட்டக் குழு அல்ல. ஏனெனில் $p$ என்பது எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருந்தாலும் $<p> = (\{mp/m \in Z\}, \cdot)$ ; ஆனால் $\{mp/m \in Z\} \neq Q$.

குழுவிலுள்ள ஒரு மூலகத்தின் பரிமாணத்தை (Order of an element) நாம் முன்னர் வரையறுத்துள்ளோம். இப்பொழுது நாம் அதற்கு இன்னொரு வரையறை கொடுக்கப்போகிறோம். முன்னர் கொடுத்துள்ளதை வரையறையாக எடுத்துக்கொண்டு இங்கே கொடுத்திருப்பதைத் தேற்றமாக நிரூபிக்கலாம்.

**3·17. வரையறை :** $a$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $a$ என்னும் மூலகத்திஞல் உருவாக்கப்படும் உட்குழுவின் பரிமாணத்தை $a$-ன் **பரிமாணம்** (order of $a$) என்கிரும். அதாவது $a$-ன் பரிமாணமும் $<a>$-ன் பரிமாணமும் ஒன்ருகும்.

**3·18. தேற்றம் :** $n$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண் என்க. இப்பொழுது $n$ என்னும் பரிமாணத்தை உடைய வட்டக் குழு ஒன்று உள்ளது.

**நிரூபணம்.** $a, a^2, \ldots, a^n$ ஆகியவைகளை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணத்தில் $a^n = e$ என்பதை அலகாகவும் '·' என்னும் செயலியை $a^i \cdot a^j = a^{i+j}$ என்றும் வரையறுக்க. இப்பொழுது $(\{e, a, \ldots a^{n-1}\}, .)$ என்பது $n$ என்னும் பரிமாணத்தைக் கொண்ட வட்டக் குழுவாக இருக்கும். இதை $C_n$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**3·19. தேற்றம் :** ஒவ்வொரு வட்டக் குழுவும் பரிமாற்றுக் குழுவாகும்,

**நிரூபணம் :** வகை 1. முடியும் வட்டக் குழு என்ருல் அதன் மூலகங்கள் $e, a, a^2, \ldots a^{n-1}$ என்றுதான் இருக்கும். இங்கு

$$a^i . a^j = a^{i+j} = a^{j+i} = a^j a^i$$

இவ்வாறு எந்த இரு மூலகங்களும் பரிமாற்று விதிக்கு (commutative law) உட்பட்டிருப்பதால் இது பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

வகை 2. முடியா வட்டக்குழு என்ருல் அதன் மூலகங்கள்... $a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2, \ldots$ என்றுதான் இருக்கும். ($a^{-1}$ என்பது $a$-ன் எதிர்மறை மூலகம். $a^{-2} = a^{-1} \cdot a^{-1}$ என்பன போன்ற சுருக்கங்கள்.)

இங்கும் $i, j > 0$ என்ருல் முன்போலவே $a^i \cdot a^j = a^j a^i$.

$i, j < 0$ என்ருலும் $a^i \cdot a^j = a^j \cdot a^i$ என்பது வெளிப்படை.

$i < 0, j > 0$ என்ருல் $i = -k$ என்க.

இப்பொழுது $k > 0, j > 0,$

$$a^{i} \cdot a^{j} = \left(a^{-1}\right)^{k} \cdot a^{j}$$
$$= \left(a^{-1} \cdot a^{-1} \ldots k \text{ தடவைகள்}\right) . (a.a.a \ldots j \text{ தடவைகள்})$$

வலப் புறத்தில் நாம் சேர்ப்பு விதியை உபயோகித்துச் சுருக்கும்போது, $a^{-1}$, $a$ ஆகியவை சம அளவையில் நீங்கிவிடும். (vanish in equal numbers) இங்கு $k > j$ என்றால் "$a^{-1} \cdot a^{-1} \ldots (k-j)$ தடவைகள்" என்ற மூலகமும், $j > k$ என்றால் "$a.a\ a \ldots (j-k)$ தடவைகள்" என்ற மூலகமும் எஞ்சியிருக்கும். இதுபோலவே $k > j$ என்றால்

$a^{j} . a^{i} = a^{-1} . a^{-1} \ldots\ldots (k-j)$ தடவைகள் என்றும், $j > k$ என்றால்,

$a^{j} . a^{i} = a.a \ldots\ldots (j-k)$ தடவைகள் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

இவ்வாறு $a^{i} \cdot a^{j} = a^{j} \cdot a^{i}$. அதாவது குழுவிலுள்ள எந்த இரு மூலகங்களை எடுத்துக்கொண்டாலும், அவை பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டுள்ளன. எனவே, இதுவும் பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

இவ்வாறு தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**3·10. தேற்றம்:** $n$ என்னும் பரிமாணத்தையுடைய $(G, .)$ என்ற குழுவில் $n$ என்னும் பரிமாணத்தையுடைய, '$a$' என்ற மூலகம் இருந்தால் $(G, .)$ என்ற அந்தக் குழு வட்டக் குழுவாகும்.

**நிருபணம்:** $a$ என்ற மூலகத்தின் பரிமாணம் $n$ என்பதால், $a^{n} = e$.

மேலும், $0 < i < n$ என்றால் $a^{i} \neq e$.

எனவே, $e, a, a^{2}, \ldots a^{n-1}$ ஆகிய $n$ மூலகங்களும் வெவ்வேறானவை. ... ... ... ... (1)

மேலும் இவை அனைத்தும் G-ல் உள்ளன ... ... (2)

(ஏனெனில் இவை அனைத்தும் $a$ என்ற G-ன் மூலகத்தை ஈருறுப்புச் செயலிக்கு உட்படுத்துவதால் கிடைப்பவை.) G யிலும் $n$ மூலகங்களே உள்ளன; $e, a, \ldots a^{n-1}$ என்ற கூட்டத்திலும் $n$ மூலகங்களே உள்ளன. ... ... ... ... (3)

எனவே $G = \{ e, a, a^2 \ldots a^{n-1} \}$. அதாவது $\langle a \rangle = (G, .)$ எனவே $(G, .)$ வட்டக் குழுவாகும்.

### பயிற்சி

1.

| . | e | x | y | z |
|---|---|---|---|---|
| e | e | x | y | z |
| x | x | 1 | z | y |
| y | y | z | 1 | x |
| z | z | y | x | 1 |

என்னும் அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் குழு $V_4$ (Vierergruppe அல்லது four group) எனப்படும். இதன் உட்குழுக்களை எழுதி அவற்றின் பெருக்கல் அட்டவணைகளைத் தயாரிக்க.

2. $a$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$S = \left\{ x \;\middle/\; \begin{array}{l} x \in G \\ a.x = x.a \end{array} \right\}$ என்க. $(S, .)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க. S ஐ $a$-ன் மையமாக்கி (Centralizer of a) அல்லது $a$-ன் மாறிலி (Normalizer of $a$) என்பது வழக்கம்.

3. $(G, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்றும்,

$$= \left\{ x \;\middle/\; \begin{array}{l} x \in G \\ x.a = a.x \;\; \forall \, a \in G \end{array} \right\}$$

என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $(C, .)$ ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க. இக் குழு $(G, .)$ என்ற குழுவின் மையம் (centre of the group $(G, .)$) எனப்படும்.

4. $(4\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}, +)$ என்ற குழுவை $(m\mathbb{Z}, +)$ என்று குறிப்பிட முடியுமா என்பதைக் காண்க. முடியுமானால் $m$-ன் மதிப்பு என்ன? இதிலிருந்து $(p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}, +)$ என்ற குழுவை $(r\mathbb{Z}, +)$ என்று குறிப்பிட முடியுமானால் $p, q, r$ என்பவைகளுக்கிடையில் உள்ள தொடர்பைக் காண்க. ($p, q, r$ என்பவை முழு எண்கள் என்று எடுத்துக் கொள்க.)

5. தேற்றம் 3·7 ஐத் தேற்றம் 3·5 ஐ உபயோகிக்காமல் உட் குழுவின் வரையறையை உபயோகித்து நிரூபிக்க.

6. $A_i, i \in J$ என்பவை $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழுக்கள் என்றும் $J \neq \phi$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க. $\bigcap_{i \in J} A_i$ என்பது $(G, .)$-ன் உட்குழு என்று காட்டுக. (J-ல் முடியா அளவு மூலகங்கள் கூட இருக்கலாம்.)

7. குழுக்களுக்கிடையில் "$a$R$b \Longleftrightarrow a$ என்பது $b$-ன் உட்குழு" என்னும் தொடர்பை வரையறுத்தால் R, பிரதிபலிக்கும் தன்மை, கடத்தும் தன்மை, எதிர் சமச்சீர் தன்மை (anti symmetric) ஆகியவற்றை உடையது என்று நிரூபிக்க.

8. (G, .) ஒரு குழு என்றும் A⊂G என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$$N(A) = \left\{ x \Big/ \begin{array}{l} x \in G \\ x.a = a.x \quad \forall\, a \in A \end{array} \right\}$$ என்று வரையறை செய்தால் (N(A), . ) ஒரு உட்குழுவா என்பதைக் காண்க.

9. (G, .) என்ற குழுவின் முறையான உட்குழுக்கள் அனைத்தும் வட்டக் குழுக்கள் என்றால் (G, .) என்பது வட்டக் குழுவாக இருக்க வேண்டுமா என்பதை ஆய்க. [பயிற்சி 1-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $V_4$-ன் உட்குழுக்களைப் பரிசீலனைக்கு எடுக்கவும். அதில் கிடைக்கும் தகவலைக் கொண்டு வட்டக் குழுவா இல்லையா என்பதை முடிவு செய்க. வட்டக் குழு என்றால் நிரூபிக்க. இல்லாவிட்டால் தவறு என்பதைக் காட்டுவதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக ]

10. (G, .) என்பது வட்டக்குழு என்றால், "அதன் ஒவ்வோர் உட்குழுவும் வட்டக் குழுவாக இருக்கும்" என்று சொல்ல முடியுமா? [$C_{10}$, $C_{18}$, $C_6$, இப்படி எவையேனும் ஓர் இரண்டு வட்டக் குழுக்களை எடுத்து இவற்றின் எல்லா உட் குழுக்களையும் ஆய்க. $<a^i, a^j>$ என்பன போன்ற உட்குழுக்களை ஆராயும்போது அவற்றின் அமைப்பிலிருந்து மேற்குறிப்பிட்டது உண்மை என்றால் நிரூபிப்பதற்கு வழியும், தவறு என்றால் அதைக் காட்ட உதாரணமும் கிடைக்கலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சி 15-ம் உதவலாம்.]

11. ஒரு குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒரு வட்ட உட்குழுவை (Cyclic sub group) உருவாக்குகிறது என்று நிரூபிக்க.

12. "ஒரு குழுவின் ஒவ்வொரு முறையான உட்குழுவும் பரிமாற்றுக் குழுவாக இருந்தால் அக் குழுவும் பரிமாற்றுக் குழுவாக இருக்கும்" என்ற கருத்து உண்மையா தவறு என்பதைக் காண்க.

| . | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $x$ | $a^2$ | $e$ | $a$ |
| $z$ | $z$ | $x$ | $y$ | $a$ | $a^2$ | $e$ |

என்ற அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் குழுவைப் பரிசீலனைக்கு எடுத்துக் கொள்க.

13. ஒரு வட்டக் குழுவின் ஒவ்வொரு முறையான உட்குழுவும் அபீலியன் குழுவாக இருக்குமா என்பதைக் காண்க.

14. $(Z_{10} - \{0\}, \in)$ என்ற குழுவுக்கு $(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot_{10})$ என்பது உட்குழு என்று நிரூபிக்க. இவ்வுட்குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயாரிக்க.

15. ஒரு முடியா வட்டக் குழுவின் மூலகங்கள் (element of an infinite cyclic group) ...... $a^{-2}, a^{-1}, e, a, a^2,$ ...... என்னும் வடிவில் உள்ளன என்று நிரூபிக்க.

# 4. நிலைமாற்றக் குழுக்கள்

## (Transformation Groups)

குழுப் பற்றிய கோட்பாடுகள் முதலில் நிலைமாற்றக் குழுக்களைப் பற்றியே இருந்தன. பின்னர்தான் வரையறைகளை அடிப்படையாகக் கொண்ட குழுப் பற்றிய கோட்பாடுகளும் குணங்களும் தோன்றின. இருந்தபோதிலும் ''ஒவ்வொரு குழுவும் ஒரு நிலை மாற்றக் குழு'' என்று சொல்லும் அளவுக்குக் கட்டியான தேற்றங்கள் உள்ளன. எனவே குழுக்களைப் பற்றிப் படித்தல் என்பது நிலைமாற்றக் குழுக்களைப் பற்றிப் படித்தல் ஆகும். இதுபோல் நிலைமாற்றக் குழுக்களைப் பற்றிப் படித்தல் என்பது பொதுப்படையாகக் குழுக்களைப் பற்றிப் படித்தலே ஆகும்.

முன்னர் நாம் ஒரு கணத்திலிருந்து இன்னொரு கணத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்ட சார்பை, நிலைமாற்றம் (Transformation) என்று பொதுப்படையாகக் குறிப்பிட்டோம். (அத். I; 6·1). இப்போது ஒரு கணத்தின் நிலைமாற்றத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

**4·1. வரையறை :** S என்ற கணத்திலிருந்து அக் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் சார்பை S என்ற கணத்தின் நிலைமாற்றம் (Transformation of the set S) என்கிறோம்.

**4·2. வரையறை :** X என்பது மூலகத்தையுடைய ஏதேனும் ஒரு கணம் என்றும், M என்பது X-லிருந்து X-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்புகளின் கணம் என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் M என்பது $x(f\cdot g)=((x)f)g$ என்று வரையறுக்கப்படும் '.' என்ற ஈருறுப்புச் செயலியின் கீழ் ஒரு குழுவாக இருக்கும் என்று எ. கா. 1·14-ல் நிரூபித்துள்ளோம். $(M, .)$ என்ற இக் குழுவின் உட்குழுக்கள் ஒவ்வொன்றும் X என்ற கணத்தின் நிலைமாற்றக் குழு [Transformation group (in X)] எனப்படும்.

*(கணங்களின் நிலை மாற்றக் குழுக்களைப் பற்றி, இதே பிரிவில் வரிசை மாற்றக் குழு என்னும் தலைப்பிலும் அடுத்த பிரிவில் ஓரினச் சார்புகள் என்ற தலைப்பிலும் தெளிவாகப் படிப்போம்.)*

பொருட்களின் நிலை மாற்றங்கள் (Transformation of solid figures)

**4·3. வரையறை :** ஒரு பொருள் இருக்கும் விதத்தில் மாற்றத்தை உண்டாக்கி அதை முன்பு இருந்த அதே இடத்தில் அதே தோற்றத்துடன் இருக்கச் செய்யும் வினை அப்பொருளின் நிலை மாற்றம் எனப்படும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்குக் கொடுக்கக்கூடிய எல்லா நிலை மாற்றங்களும் சேர்ந்து ஒரு குழுவை நிர்ணயிக்கும். இக் குழு அப் பொருளின் நிலைமாற்றக் குழு (Transformation group of the tetrahedron etc.) எனப்படும். $a, b$ ஆகியவை இரண்டு நிலை மாற்றங் கள் என்றால் நாம் "$a.b$" என்பதை "$a$ என்ற நிலை மாற்றத்திற்குப் பின்னர் $b$ என்ற நிலை மாற்றம் செய்யப்பட்டால் கிடைக்கும் மொத்த நிலை மாற்றம்" என்று வரையறுக்கலாம். ($a.b$ = முதலில் $a$, பின்னர் $b$ ; இதையும் வேறுவிதமாக வரையறுப்பாரும் உளர்.)

**4·4 தேற்றம் :** குறிப்பிட்ட ஒரு பொருளுக்குக் கொடுக்கக் கூடிய நிலை மாற்றங்கள் அனைத்தும் சேர்ந்து ஒரு குழுவாகும்.

நிரூபணம் : (i) $a, b$ ஆகியவை நிலைமாற்றங்கள் என்றால் $a.b$ என்பதுவும் நிலைமாற்றமாகவே இருக்கும். ஏனெனில் $a$ ஐ முடித்த பின்னும் பொருள் அதே இடத்தில் அதே தோற்றத்துடன் இருக்கும் இப்பொழுது இதை $b$-க்கு உட்படுத்தினால் அதன் பின்பும் அதே இடத்தில் அதே தோற்றத்துடன் இருக்கும். அதாவது பொருளை $a.b$-க்கு உட்படுத்திய பின் பார்த்தால் அதே இடத்தில் அதே தோற்றத்துடன் இருக்கும். இவ்வாறு '.' என்ற செயலி $a, b \in T \Longrightarrow a.b \in T$ என்னும் விதிக்குட்பட்டுள்ளது. (1)

(T என்பது நிலைமாற்றங்களால் ஆன கணம் என்க.)

(ii) மேலும் நிலைமாற்றங்களில் வரிசை முறையே முக்கிய மாதலால் $a.(b\,.\,c)=(a\,.\,b).c$ என்ற சேர்ப்பு விதி உண்மையாக இருக்கும்.

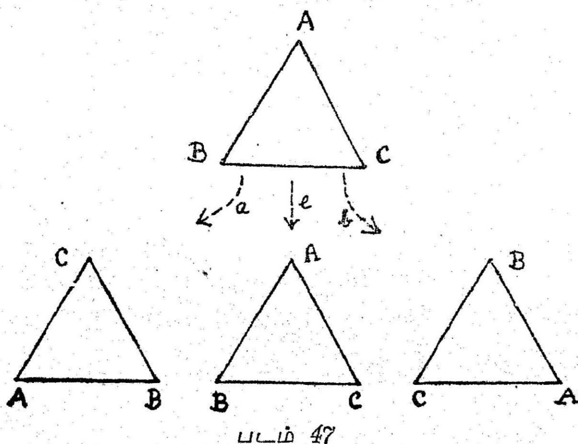
(iii) கொடுத்திருக்கும் பொருளை ஒன்றுமே செய்யாது அப்படியே விட்டுவைத்தால் அது முன்பு இருந்த அதே இடத்தில் அதே தோற்றத்துடன் இருக்கும். இது அலகு நிலைமாற்றம் (Identity transformation) எனப்படுகிறது. இது $(T, .)$-ல் அலகாக இருக்கும்.

(iv) மேலும் ஒரு நிலை மாற்றத்தால் ஏற்பட்ட விளைவை நீக்கும் பொருட்டுச் செய்யப்படும் மாற்றமும் நிலைமாற்றமாகவே இருக்கும்.

அதாவது ஒவ்வொரு நிலைமாற்றத்திற்கும் எதிர்மறை நிலைமாற்றம் உள்ளது.

(i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து $(\Gamma, .)$ ஒரு குழுவாகும். எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**4·5. எ. கா. :** ABC என்ற ஒரு சமபக்க முக்கோண வடிவத்திலுள்ள அட்டையை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் ஒரு புறம் பச்சை நிறமாகவும் மறு புறம் மஞ்சள் நிறமாகவும் இருக்கிறது என்க. பச்சை நிறப் பக்கம் வெளியில் தெரியும்படியாக அது ஓர் இடத்தில் இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்க.




படம் 47

இந்த அட்டைக்கு நாம் மூன்று நிலை மாற்றங்களைக் கொடுக்கலாம். அவற்றின் பலன் அட்டையில் என்ன என்பது படத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. $e$ என்பது அலகு நிலை மாற்றத்தைக் குறிக்கிறது $a$, $b$ என்பவை இந்த முக்கோணத்தை முறையே $120°$, $240°$ கடிகார திசைக்கு எதிராகச் (anti-clockwise direction) சுற்றுவதால் ஏற்படும் நிலைமாற்றங்களைக் குறிக்கும். இப்போது நாம் இவற்றிற்கிடையே உள்ள செயற்பலன்களைப் பார்ப்போம்.

$a \,.\, a = b$. ஏனெனில் $120°$ சுற்றிவிட்டு மீண்டும் $120°$ சுற்றினால் மொத்தம் சுற்று $120° + 120° = 240°$ ஆகிறது.

$(a \,.\, a) \,.\, a = e = b \,.\, a$. ஏனெனில் அட்டையை $360°$ சுற்றுவது என்பது அதை ஒன்றும் செய்யாமல் விட்டுவைப்பதற்கு ஒப்பாகும்.

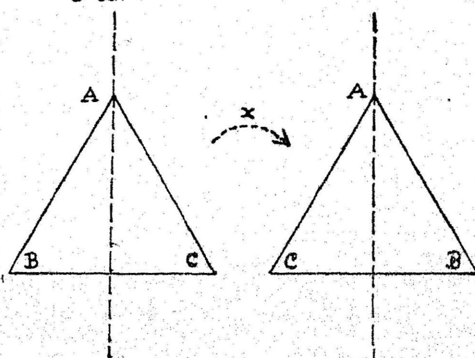
இது போல் மற்ற பெருக்கற் பலன்களையும் கண்டு பிடித்து அட்டவணை தயாரிக்கலாம். இது குழுவைக் குறிக்கிறது என்பது தெளிவு. இது $c_3$ ஆகும்.

| · | e | a | b |
|---|---|---|---|
| e | e | a | b |
| a | a | b | e |
| b | b | e | a |

இதுபோல் இரண்டு பக்கமும் வெவ்வேறாக தோற்றமளிக்கும் சதுர அட்டை ஒன்றின் நிலைமாற்றக் குழுவில் 4 மூலகங்கள் இருக்கும். இக்குழு $c_4$ ஆக இருக்கும். பொதுவாக இரண்டு பக்கமும் வெவ்வேறாகத் தோற்றமளிக்கும் $n$ பக்கங்களைக்கொண்ட ஒழுங்கான பலகோணத்தின் நிலைமாற்றக் குழுவில் '$n$' மூலகங்கள் இருக்கும். இக்குழு $c_n$ ஆக இருக்கும். இதுபோல் இரண்டு பக்கமும் வெவ்வேறாகத் தோன்றும் வட்டமான ஓர் அட்டையின் நிலைமாற்றக் குழுவில் முடியா அளவு மூலகங்கள் இருக்கும். இக் குழு வட்டக் குழுவாக இராது. $\theta^\circ$ சுற்றுவதால் கிடைக்கும் நிலைமாற்றத்தை $\theta$ என்ற மெய் எண்ணால் குறிப்பிடலாம். $\theta_1^\circ$, $\theta_2^\circ$ சுற்றுவதால் கிடைக்கும் இரு நிலைமாற்றங்களையும் இணைப்பதால் கிடைக்கும் நிலை மாற்றம் $(\theta_1+\theta_2)^\circ$ சுற்றுவதால் கிடைக்கும் நிலைமாற்றமாக இருக்கும். சுருங்கக் கூறின் இக்குழுவானது மெய் எண்களை $360^\circ$-ன் சுற்றுக்குக் கூட்டுவதால் கிடைக்கும் குழுவைப் போன்று இருக்கும்.

இருமுக நிலைமாற்றக் குழுக்கள் (Dihedral groups)

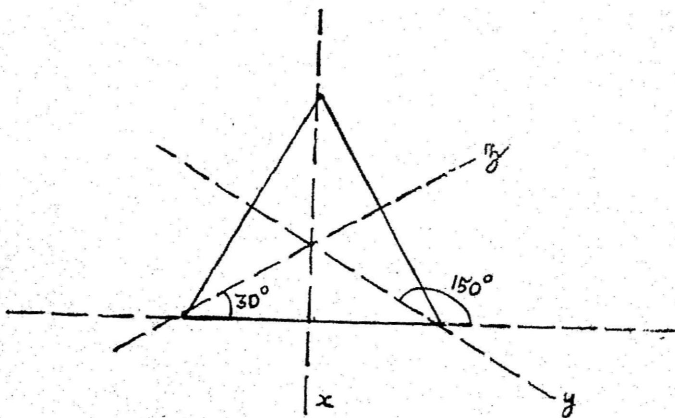
4·6. எ. கா.: முன்பு நாம் எடுத்துக்கொண்ட முக்கோண அட்டையில் இருபுறமும் ஒன்றுபோல் (Identical) இருந்தால், முன்னர் குறிப்பிட்ட மூன்று நிலைமாற்றங்களுடன் கூடுதலாக மூன்று நிலைமாற்றங்கள் கிடைக்கும். சமபக்க முக்கோணமானது ஒவ்வொரு குத்துக்கோட்டின் இருபுறங்களிலும் ஒரேமாதிரியாக (Symmetric about the altitudes) இருப்பதால் ஏதேனும் ஒரு குத்துக்கோட்டை அச்சாகக் கொண்டு இந்த அட்டையை $180^\circ$ சுற்றினால் நாம் ஒரு




படம் 48

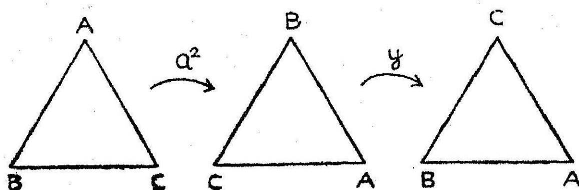
நிலைமாற்றத்தைப் பெறலாம். இதை, "குத்துக் கோட்டின் மேல் பிரதிபலிப்பு" எனலாம். $x$ என்பது இப்பிரதிபலிப்பைக் குறிப்பிட்டால் $x.x$ என்பது அலகாக இருக்கும். (ஒரு பொருளை ஏதேனும் ஒரு நேர்கோட்டை அச்சாகக் கொண்டு $360°$ சுற்றினால் அப் பொருள் முன்பு இருந்த அதே நிலைக்கு வரும்.) அதாவது $x^2 = e$. இதுபோல் மீதியுள்ள இரண்டு குத்துக்கோடுகளின் மேலும் பிரதிபலிப்பதனால் கிடைக்கும் $y$ $z$ என்ற இரு நிலைமாற்றங்களும் $y^2 = e$, $z^2 = e$ என்னும்படியாக இருக்கும். இவ்வாறாக $e, a, a^2$, $x, y, z$ என்ற ஆறு நிலைமாற்றங்கள் கிடைக்கின்றன. இவை 6-ம் சேர்ந்து ஒரு குழுவாகும். நாம் இக்குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயாரிக்கப் போகின்றோம்.

எவையேனும் இரண்டு நிலைமாற்றங்களின் பெருக்கு நிலைமாற்றத்தை (Product transformation) கண்டுபிடிக்கும் போது நாம், "$x$ என்பது A என்ற உச்சி வழியாகச் செல்லும் குத்துக் கோட்டின் மேல் உள்ள பிரதிபலிப்பு" என்று எடுக்காமல், "$x$ என்பது செங்குத்தாக (Vertical) இருக்கும் சமதோற்றக் கோட்டின் (line of symmety) மேல் உள்ள பிரதிபலிப்பு" என்றே எடுத்துக் கொள்கிறோம். இது போல் $y$ என்பது "கிடைக் கோட்டிற்கு $150°$ சாய்ந்துள்ள சமதோற்றக் கோட்டின் மேல் உள்ள பிரதிபலிப்பு" என்றும் $z$ என்பது "கிடைக் கோட்டிற்கு $30°$ சாய்ந்துள்ள சம

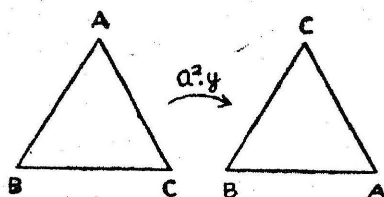



தோற்றக் கோட்டின் மேலுள்ள பிரதிபலிப்பு" என்றும் எடுத்துக் கொள்கிறோம். (சில அமைப்பு வசதிகளுக்குக்காக $y$ ஐக் கிடைக் கோட்டிற்கு $30°$ சாய்ந்துள்ள சம தோற்றக் கோட்டின் மேலுள்ள பிரதி பலிப்பு என்று எடுத்துக் கொள்ளவில்லை.)

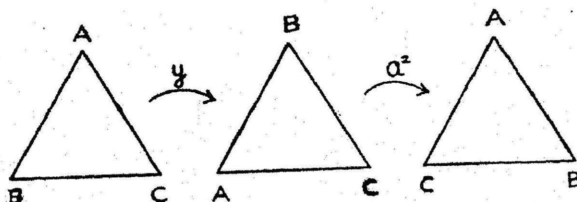
பெருக்கு நிலைமாற்றங்களைப் பின் வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $a^2.y$ ஐப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.




எனவே




இங்கு $a^2 \cdot y$ ஆல் கிடைக்கும் பலன் '$z$' ஆல் கிடைக்கும் பலனாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். எனவே $a^2 . y = z$. இதுபோல் $y . a^2$ என்பதை,




என்ற தொகுப்பிலிருந்து காணலாம் இங்கு $y . a^2$-ன் பலன் $x$-ன் பலனை ஒத்திருப்பதால் $y . a^2 = x$. இதுபோல் மற்ற பெருக்கற் பலன்களையும் கண்டுபிடித்துப் பின்வரும் அட்டவணையை நிரப்பலாம்.

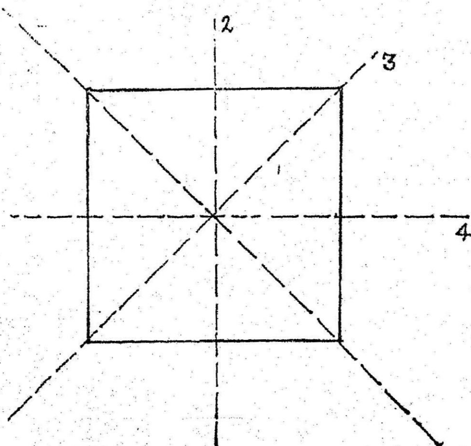
| . | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $x$ | $a^2$ | $e$ | $a$ |
| $z$ | $z$ | $x$ | $y$ | $a$ | $a^2$ | $e$ |

இவ்வாறுன குழுக்களை இருமுக நிலை மாற்றக் குழுக்கள் (Dihedral groups) என்பது வழக்கம். இங்கு நாம் எடுத்துக்கொண்ட குழுவில் 6 மூலகங்கள் இருப்பதால் இக்குழு 6 என்ற பரிமாணத்தைக் கொண்ட இருமுக நிலைமாற்றக் குழு (Dihedral group of order 6) எனப்படும். இதை $D_6$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**4·7.** வரையறை: இரு புறங்களும் ஒரே மாதிரியாகத் தோற்றமளிக்கும் ஓர் ஒழுங்கான பலகோணத்தின் நிலைமாற்றங்களால் உருவாக்கப்படும் குழு (நிலைமாற்றக் குழு) (இருமுக நிலைமாற்றக் குழு (Dihedral group) எனப்படும். $n$ பக்கங்களைக் கொண்ட இத்தகைய பலகோணத்தின் இருமுக நிலைமாற்றக் குழு "$2n$ என்ற பரிமாணத்தை உடைய இருமுக நிலை மாற்றக் குழு" எனப்படும். இது $D_{2n}$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

எ.கா. 4·6-ல் கொடுத்துள்ளபடி இருமுக நிலைமாற்றக் குழுவின் அட்டவணையைத் தயாரித்தல், பலகோணத்தின் பக்கங்களின் எண்ணிக்கை கூடக்கூட, கடினமாகிறது. ஆனுல் இதைப் பின்வரும் விதிகளின்படி இலகுவாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இரண்டு புறங்களும் ஒரே தோற்றத்துடன் உள்ள '$n$' பக்கங்களைக் கொண்ட ஓர் ஒழுங்கான பலகோணத்தின் (regular




படம் 20.

polygon of $n$ sides) நிலை மாற்றக் குழுவில் $2n$ மூலகங்கள் இருக்கும். இவற்றுள் $n$ மூலகங்கள் முறையே $0°$, $\frac{2\pi}{n}$, $2.\frac{2\pi}{n}$, ..., $(n-1)\frac{2\pi}{n}$

ஆகிய கோணங்கள், பலகோணத்தைச் சுற்றுவதால் (anti-clockwise) கிடைப்பனவாகும். இவற்றை நாம் $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ என்று குறிப்பிடலாம். அத்துடன் $a^n = e$. (இதை ஐங்கோணத்திலிருந்து சரி பார்க்கவும்.) மீதியுள்ள $n$ மூலகங்களும் குறிப்பிட்ட பலகோணத்திற்கு உள்ள $n$ சமதோற்றத் திசைக(சமதோற்றக் கோடுக)ளின் மேல் பிரதிபலிப்பதால் கிடைப்பனவாகும். சதுரத்தின் சமதோற்றத் திசைகள் 1, 2, 3, 4 என்று படத்தில் கொடுத்திருப்பவையாகும்.

$x$ என்பது ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட சம தோற்றத் திசையின் மேல் பிரதிபலிப்பதால் ஏற்படும் நிலைமாற்றம் என்க. இப்பொழுது எஞ்சிய சம தோற்றத் திசைகளின் மேல் உள்ள பிரதிபலிப்புகளை $x\,a, x.a^2, \ldots\ldots x\,a^{n-1}$ என்னும் மூலகங்கள் குறிப்பிடும். மேலும் இம்மாதிரிக் குழுக்களில் $a.x = x.a^{n-1}$ என்ற முக்கியமான குணமும் இருக்கும். இங்குக் கிடைக்கும் குழுதான் "$2n$ என்ற பரிமாணத்தை உடைய இருமுக நிலைமாற்றக் குழுவாகும்." இதுவே $D_{2n}$ என்று குறிப்பிடப்படும் குழுவுமாகும். எனவே $D_{2n}$-ன் பெருக்கல் அட்டவணையை எழுதுவதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான விதிகளைப் பின்வருமாறு குறிப்பிடலாம்.

(i) மூலகங்கள் : $e, a, a^2, \ldots\ldots, a^{n-1}, x, xa, xa^2, \ldots\ldots, xa^{n-1}$

(ii) $a^n = e\,;\ x^2 = e.$

(iii) $a.x = x.a^{n-1}.$

**4·8. எ.கா. :** மேலே கொடுத்திருக்கும் வாதங்களின்படி $D_6$ என்பதைக் கண்டுபிடித்து, அது முன்னால் எ.கா. 4·6-ல் கண்டுபிடிக்கப்பட்டிருக்கும் குழுவுடன் ஒத்திருக்கிறதா என்பதைப் பார்ப்போம்.

மூலகங்கள் : $e, a, a^2, x, xa, xa^2$

$xa = y$ என்றும், $xa^2 = z$ என்றும் எழுதிக் கொள்வோம்.

விதிகள் $a^3 = e\,;\quad x^2 = e$ (1)

$a.x = x.a^2$ (2)

பெருக்கற் பலன்களைப் பின்வருமாறு கண்டுபிடித்து நிரப்பலாம்.

| $\cdot$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $\frac{y}{xa}$ | $\frac{z}{xa^2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $y$ | | |
| $x$ | $x$ | | | $e$ | | |
| $y=xa$ | $y$ | | $x$ | | $e$ | |
| $z=xa^2$ | $z$ | | | $a$ | | $e$ |

(i) $a.x = ax^2 = z$ (2)-லிருந்து

(ii) $ay = a.(x.a)$

$= (a.x).a$ (சேர்ப்பு விதி)

$= xa^2.a$ (2)-லிருந்து

$= xa^3$

$= x$ (1)-லிருந்து

(iii) $a.z = a.(x.a^2)$

$= (a.x).a^2$ (சேர்ப்பு விதி)

$= (x.a^2).a^2$ ((2)-லிருந்து)

$= x.a^4$ (சேர்ப்பு விதி)

$= x.a = y$ ((1)-லிருந்து)

(iv) $y.a^2 = (x.a).a^2$

$= xa^3$ (சேர்ப்பு விதி)

$= x$ ((1)-லிருந்து)

(v) $y.y = (x.a).(x.a)$

$= x.(a.x).a$ (சேர்ப்பு விதி)

$= x.(x.a^2).a$ ((2)-லிருந்து)

$= x^2.a^3$ (சேர்ப்பு விதி)

$= e$ ((1)-லிருந்து)

(vi) $z.z = (x.a^2).(x.a^2)$

$= x.(a^2.x).a^2$

இங்கு $a^2.x = a.(a.x)$

$= a.(x.a^2)$

$= (a.x).a^2$

$= (x.a^2).a^2$

$= xa$

$\therefore\ z.z = x(xa)\,a^2$

$= x^2a^3$

$= e$ ((1)-லிருந்து)

(vii) $z.x=(x.a^2).x$
$\quad\quad =x.(a^2.x)$

ஆனால், $a^2.x=x\,a$ என்று முன்னர் (vi-ல்) நிரூபித்துள்ளோம்.
$\therefore\quad z.x=x.(xa)$
$\quad\quad =x^2a$
$\quad\quad =a \qquad\qquad$ ((1)-லிருந்து).

(viii) $a^2.x=x.a$ என்று (vi)–ல் நிரூபித்துள்ளோம்.
$\therefore\quad a^2.x=x.a=y.$

இதுபோல் மீதி உள்ள பெருக்கு நிலை மாற்றங்களையும் கண்டு பிடித்து அட்டவணையை நிரப்பி எ. கா. 4·6-ல் உள்ள அட்டவணையுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால் இவை இரண்டும் ஒன்றுயிருக்கும்.

**4·9. எ. கா.** : முன்போலவே 8 என்ற பரிமாணத்தையுடைய இருமுக நிலைமாற்றக் குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையைப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம். *(கண்டுபிடிக்க.)*

மூலகங்கள் : $e, a, a^2, a^3, x, xa, xa^2, xa^3.$

விதிகள் : (i) $a^4=e;\quad x^2=e.$

(ii) $ax=xa^3.$

| | | | | | | | y | z | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | . | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $x$ | $xa$ | $xa^2$ | $xa^3$ |
| | $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $x$ | $y$ | $z$ | $p$ |
| | $a$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ | | | | |
| | $a^2$ | $a^2$ | $a^3$ | $e$ | $a$ | | | | |
| | $a^3$ | $a^3$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | | | | |
| | $x$ | $x$ | | | | $e$ | | | |
| $y$ | $xa$ | $y$ | | | | | $e$ | | |
| $z$ | $xa^2$ | $z$ | | | | | | $e$ | |
| $p$ | $xa^3$ | $p$ | | | | | | | $e$ |

$a.x=x.a^3$
$a^2x=a.(a.x)$
$\quad =a\,(xa^3)$
$\quad =(a.x).a^3$
$\quad =xa^3.a^3$
$\quad =xa^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad$ (A)

$a^3.x=a.(a^2x)$
$\quad =a.(x.a^2)$

$$=(a.x).a^2$$
$$=(x.a^3).a^2$$
$$=xa$$

இவ்வாறு $a \cdot x = x \cdot a^3$
$a^2 \cdot x = x \cdot a^2$
$a^3 \cdot x = x \cdot a$

நாம் விவாதிக்கும் குழு $D_8$ ஆகும். இவற்றிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு பொதுச் சூத்திரத்தைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமா என்பதை ஆய்க.

இருபுறமும் ஒரே தோற்றத்துடன் உள்ள (சதுரமல்லாத) செவ்வகத்தின் நிலைமாற்றக் குழுவானது நான்கு மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும். இது உண்மையில் "4 என்ற பரிமாணத்தை உடைய இருமுக நிலை மாற்றக் குழுவாகும்". இதை இரண்டு விதங்களில் (ஒன்று செவ்வகத்தை எடுத்து அதன் நிலை மாற்றங்களை எழுதி; மற்றொன்று விதிகளை உபயோகித்து $D_4$ஐ எழுதி) கண்டுபிடித்து, பெருக்கல் அட்டவணை தயாரித்து, இரண்டும் ஒன்றுயிருக்கின்றன என்று காட்டலாம். இக்குழு (Vierergruppe அல்லது four group) எனப்படும். இதை $V_4$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**வரிசை மாற்றக் குழுக்கள் (Permutation groups)**

நிலை மாற்றக் குழுக்களில் அடங்கிய ஒரு பிரிவே வரிசை மாற்றக் குழுக்களாகும்.

**4·10. வரையறை:** X என்பது மூலகத்தையுடைய முடியும் கணம் (Finite non empty set) என்க. X-லிருந்து X-க்கு வரையறுக்கப்படும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பு வரிசை மாற்றம் (Permutation) எனப்படும். X-ல் $n$ மூலகங்கள் இருந்தால் இது $n$ பொருட்களின் மேலான வரிசை மாற்றம் (Permutation on $n$ letters) எனப்படும்.

X என்பது மூலகத்தையுடைய கணமாக இருந்தால் $f: X \longrightarrow X$ என்று வரையறுக்கப்படும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்புகள் சேர்ந்து ஒரு குழுவை நிர்ணயிக்கின்றன என்று நிரூபித்துள்ளோம். (எ. கா. 1·14). இப்போது X என்னும் கணம் முடியும் கணமாக இருந்தால் என்ன நடக்கிறது என்று பார்ப்போம்.

**4·11 எ. கா.** $X = \{a, b, c\}$ என்க. இப்போது நாம் சார்புகளைச் சுருக்கமாகப் பின்வருமாறு குறிக்கலாம்.

$$\begin{matrix} a\to b \\ b\to a \\ c\to c \end{matrix} \text{ என்ற சார்பை, } \begin{matrix} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & a & c \end{matrix} \text{ என்றும், } \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ என்றும்}$$

குறிப்பிடுகிறோம். இவ்வாறாக, X-லிருந்து X-க்கு வரையறுக்கக் கூடிய ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்புகள்,

$$p_0 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \quad p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \quad p_4 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} \quad p_5 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

இங்கு எல்லாச் சார்புகளிலும் முதல் வரிசை ஒரே மாதிரியாக உள்ளது. இரண்டாவது வரிசை மட்டுமே சார்பை நிர்ணயிக்கிறது. இரண்டாவது வரிசைகள் உண்மையில் $a, b, c$ ஆகிய மூன்று எழுத்துகளில் செய்யப்பட்டிருக்கும் வரிசை மாற்றங்களாகும். எனவே இவைகளைச் சார்புகள் என்பதைவிட வரிசை மாற்றங்கள் (Permutations) என்பதே பொருத்தமாகும். இங்கு $p_i\, p_j$ என்பதை "முதலில் $p_i$ ஐச் செய்க ; பின்னர் $p_j$ச் [illegible]

என்பதைக் குறிப்பதற்காக எடுத்துக் கொண்டால் நாம் இவ்வரிசை மாற்றங்களின் பெருக்கற் பலன்களைப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

$p_4 \cdot p_1$ என்பதைக் கண்டுபிடிக்க :

$p_4$ ஆல் $a$ என்ற மூலகம் $b$-க்குச் செல்கிறது.

$p_1$ ஆல் $b$ என்ற மூலகம் $c$-க்குச் செல்கிறது.

∴ $p_4 \cdot p_1$ ஆல் $a$ என்ற மூலகம் $c$-க்குச் செல்கிறது. ... ... 1

$p_4$ ஆல் $b$ என்ற மூலகம் $a$-க்குச் செல்கிறது.

$p_1$ ஆல் $a$ என்ற மூலகம் $b$-க்குச் செல்கிறது.

∴ $p_4 \cdot p_1$ ஆல் $b$ என்ற மூலகம் $b$-க்குச் செல்கிறது ... ... 2

$p_4$ ஆல் $c$ என்ற மூலகம் $c$-க்குச் செல்கிறது.

$p_1$ ஆல் $c$ என்ற மூலகம் $a$-க்குச் செல்கிறது.

∴ $p_4 \cdot p_1$ ஆல் $c$ என்ற மூலகம் $a$-க்குச் செல்கிறது. ... ... 3

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $p_4 \cdot p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = p_5$.

இங்கு மூன்றாவது பாகத்தில் ((3)-ல்) "ஒவ்வொரு வரிசை மாற்றமும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு" என்பதை உபயோ

கித்து (1), (2) ஆகியவற்றின் உதவியால் இலகுவில் கண்டு பிடித்துவிடலாம். இங்கு (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $p_4 \cdot p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ என்று கிடைக்கும். ∴ $p_4 \cdot p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$ என்று கூறிவிடலாம். $p_4 \cdot p_1$ஐக் கண்டுபிடித்ததுபோல் மற்ற பெருக்கற் பலன்களையும் கண்டுபிடித்து அட்டவணையை நிரப்பினால் பின்வரும் அட்டவணை கிடைக்கும்.

| · | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_0$ | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
| $p_1$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_0$ | $p_5$ | $p_3$ | $p$ |
| $p_2$ | $p_2$ | $p_0$ | $p_1$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_3$ |
| $p_3$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ |
| $p_4$ | $p_4$ | $p_5$ | $p_3$ | $p_2$ | $p_0$ | $p_1$ |
| $p_5$ | $p_5$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_0$ |

இக் குழு உண்மையில் எ.கா. 4·6-ல் கொடுத்துள்ள குழுவைப் போன்றதாகும். இதை $e, a, a^2, x, y, z$ ஆகியவற்றை முறையே $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ ஆகியவற்றின் இடத்தில் போட்ட அட்ட வணையை எழுதினால் காணலாம். மேலே நாம் பார்த்த குழுவில் 6 அல்லது ∠3 மூலகங்கள் உள்ளன.

**4·12. வரையறை:** $n$ மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்தி லிருந்து அக் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச்சார்புகளால் உருவாக்கப்படும் குழு "symmetric group of degree $n$" என்றும், $n$ பொருட்களின் மேலான வரிசை மாற்றக் குழு (permutation group on '$n$' letters) என்றும் கூறப்படும். இதை $S_n$ என்று குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**குறிப்பு:** $n$ மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து அக் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்பது '$n$' பொருட்களின் மேலான ஒரு வரிசை மாற்றம் ஆகும். இதுபோல் '$n$' பொருட்களின் மேலான ஒரு வரிசை மாற்றம் '$n$' மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு கணத்திலிருந்து அக் கணத்திற்கு வரையறுக்கப்படும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். $S_n$-ல் ∠$n$ மூலகங்கள் இருக்கும் என்பதுவும் குறிப்பிடத் தக்கது.

## பயிற்சி

1. வரையறை 4·7ஐ அடுத்துப் பின்னால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாதங்களில் உள்ள $x, e, n$ என்பவைகள் $0<r<n$ என்றால், $a^r \cdot x = x \cdot a^{n-r}$ என்னும் விதிக்கு உட்பட்டுள்ளன என்று நிரூபிக்க.

2. $D_{10}$-ன் பெருக்கல் அட்டவணையை நிரப்பி எழுதுக.

3. $D_6$-ன் உட்குழுக்களை எழுதி அவற்றின் பெருக்கல் அட்டவணைகளைத் தயார் செய்க.

4. $D_8$-ன் உட்குழுக்களை எழுதி அவற்றின் பெருக்கல் அட்டவணைகளைத் தயார் செய்க.

5. $D_{2n}$-ல் '$n$' என்ற பரிமாணத்தை உடைய வட்ட உட்குழு (Cyclic sub group) இருக்கும் என்று நிரூபிக்க. ($D_{2n}$-ன் யறையை உபயோகிக்கலாம்.)

6. $a, x$ ஆகியவற்றிற்கு நாம் முன்னர் எடுத்துக்கொண்டது போல் (பயிற்சி 1-ல்) விளக்கங்கள் இருந்தால் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $\langle a \rangle = C_n$

(ii) $\langle a, x \rangle = D_{2n}$

(iii) $\langle a, x \cdot a \rangle = D_{2n}$

(iv) $\langle x \rangle = C_2 = \langle xa \rangle$

7. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ என்றால்,

$\alpha^{-1}, \beta^{-1}, \alpha\beta, \beta\alpha, \beta\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\beta, \beta^{-1}\alpha$

$(\alpha\beta)^{-1}, (\beta\alpha)^{-1}$ ஆகிய வரிசை மாற்றங்களைக் காண்க.

8. $S_2$ என்ற குழுவின் மூலகங்களை எழுதி அதன் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயார் செய்க.

9. $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ என்னும் வரிசை மாற்றங்கள் சேர்ந்து ஒரு குழுவை நிர்ணயிக்கின்றனவா என்பதைக் காண்க.

# 5. ஓரினச் சார்பு

## (Isomorphism)

5·1. வரையறை: (G, . ), (H, $*$ ) என்பவை இரண்டு குழுக்கள் என்க. G-லிருந்து H-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $x \longrightarrow x'$ என்னும் ஒன்றுக் கொன்ருன சார்பு

$$(x.y)' = x' * y'$$

என்னும் விதிக்கேற்ப இருக்குமாயின் இது ஓர் ஓரினச் சார்பு (Isomorphism) எனப்படும். இச்சார்பு முழுச் சார்பாகவும் இருந்தால் இது முழு ஓரினச் சார்பு (Onto isomorphism) எனப்படும். $(x.y)' = x' * y'$ என்பது செயலைப் பாதுகாக்கும் குணம் (Preserving operation) எனப்படும்.

5·2. வரையறை : (G, . ) என்ற குழுவிலிருந்து (H, $*$ ) என்ற குழுவுக்கு முழு ஓரினச் சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமானல் (G, . ), (H, $*$ ) என்ற இரு குழுக்களும் அமைப்பில் ஒன்ருயிருக்கின்றன (Isomorphic, abstractly equivalent) என்கிருேம். இதை (G, . ) $\cong$ (H, $*$ ) என்று குறிப்பிடுகிருேம்.

$(x.y)' = x' * y'$ என்பது, ஒரு "பெருக்குத் தொகையின் பிம்பமானது பிம்பங்களின் பெருக்குத்தொகைக்குச் சமமாக இருக்கும்" என்பதையே கொடுக்கிறது. $x.y$ என்பது பெருக்குத் தொகை; $(x.y)'$ என்பது பெருக்குத் தொகையின் பிம்பம்; $x'$ & $y'$ என்பவை $x, y$ ஆகியவற்றின் பிம்பங்கள்; $x' * y'$ என்பது பிம்பங்களின் பெருக்குத் தொகை. $x, y$ என்பன (G, . )-ன் மூலகங்கள் என்பதால் $x.y$ என்றும் $x', y'$ என்பவை (H, $*$)-ன் மூலகங்கள் என்பதால் $x' * y'$ என்றும் வருகின்றது. இங்குச் சார்பை $f : G \longrightarrow H$ என்று குறிப்பிட்டால் $(x.y)' = x' * y'$ என்பது $f(x.y) = f(x) * f(y)$ என்னும் வடிவில் இருக்கும்.

5·3. எ. கா.: $(Z, +)$, $(2Z, +)$ ஆகிய இரண்டும் முறையே முழு எண்கள், இரட்டை எண்கள் ஆகியவற்றின் குழுக்கள் என்க.

இப்பொழுது $x \longrightarrow 2n$ என்னும் நியமனத்தை Z-லிருந்து 2Z-க்கு வரையறுப்போம். Z-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் தனித்த பிம்பம் இருப்பதால் இது சார்பாகிறது. மேலும் 2-Z-ல் இரட்டை முழு எண்கள் மட்டுமே இருப்பதால் 2 Z-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூல கத்திற்கும் மூல பிம்பம் இருக்கும். எனவே மேலே குறிப்பிட்ட சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். ($\because x \neq y \Longrightarrow 2x \neq 2y$)

$$x, y \in Z \text{ என்க.}$$
$$x' = 2x \quad \& \; y' = 2y$$
$$(x + y') = 2(x + y) = 2x \div 2y = x' + y'$$

அதாவது $(x\ y)' = x' * y'$ என்னும் செயலைப் பாதுகாக்கும் குணம் இங்கு உண்மையாக உள்ளது. ( . , * ஆகியவற்றிற்குப் பதில் இங்கு '+' உள்ளது.)

இவ்வாறாக (Z, + ), (2 Z, + ) ஆகிய இரண்டு குழுக்களும் அமைப்பில் ஒன்றானவை.

5·4. எ. கா.: (R, + ) என்பது மெய் எண்கள் கூட்டலினால் உண்டாக்கும் குழு என்க. ($R_+$, . ) என்பது நேர்த்திசை மெய் எண்கள் பெருக்கலினால் உண்டாக்கும் குழு என்க. இப்பொழுது $x \longrightarrow e^x$ என்னும் நியமனத்தை R-லிருந்து $R_+$-க்கு வரையறுக்க. R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் தனித்த பிம்பம் உள்ளதால் இது சார்பாகும். மேலும் $p \in R_+$ என்றால் $p = e^{\log p}$ என்று எழுத முடிவதால் $p$ என்ற $R_+$-ன் எந்த ஒரு மூலகத்திற்கும் '$\log p$' என்ற மூல பிம்பம் உள்ளது; எனவே இது முழுச் சார்பாகும். மேலும் $x \neq y \Longrightarrow e^x \neq e^y$. எனவே நாம் வரையறுத்துள்ளது ஒன்றுக் கொன்றான முழுச் சார்பாகும். ... ... ... (1)

மேலும் $x, y \in R$ என்றால்

$$x' = e^x \quad \& \; y' = e^y.$$
$$(x + y)' = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = x' \cdot y'$$

அதாவது இங்குள்ள சார்பு செயலைப் பாதுகாக்கிறது. ... (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து (R, + ) $\cong$ ($R_+$, . ).

மேலே நாம் ஏற்படுத்திய முழு ஓரினச் சார்பை உண்மையில் $a$ என்ற ஏதேனும் ஒரு மிகை மெய் எண்ணை எடுத்துக்கொண்டு $x \longrightarrow a^x$ என்று ($R \longrightarrow R_+$) வரையறுக்கலாம். இதே சார்பை மாற்றி $R_+ \longrightarrow R$ வரையறுத்தால் $x \longrightarrow \log_a x$ என்று வரையறுக் கலாம்.

" அமைப்பில் ஒன்றுயிருத்தல் " என்பது குழுக்களுக்குள் ஒரு தொடர்பை ஏற்படுத்துகின்றது. இத் தொடர்பு பிரதிபலிக்கும் தன்மை உடையது. அதாவது $x \longrightarrow x$ என்ற சார்பின் கீழ் $(G, .) \cong (G, .)$. இதுபோல் இத்தொடர்பு சமச்சீர் தொடர் பாகும். மேலும் இது கடத்தும் தன்மை உடையது. இவ்வாறாக '$\cong$' (isomorphic to) என்பது குழுக்களுக்கிடையில் ஒரு சரிநிகர் தொடர்பாக (equivalence relation) இருக்கும்.

**5·5. தேற்றம்:** $(G, .) \cong (H, *)$ என்றால் $(G, .)$-ன் அலகின் பிம்பமானது $(H, *)$-ன் அலகாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** $e$ என்பது $(G, .)$-ன் அலகு என்றும், $x \longrightarrow x'$ என்பது இங்குள்ள முழு ஓரினச் சார்பு என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

இப்பொழுது $x.e = e.x = x \quad \forall\, x \in G$.

மேலும், $x,y \in G \Longrightarrow (x.y)' = x' * y'$

$\therefore \quad (x.e)' = x' * e' \quad \forall\, x \in G. \qquad \ldots (1)$

ஆனால் $x.e = x \quad \forall\, x \in G$.

$\therefore$ (1)-லிருந்து $x' = x' * e' \quad \forall\, x \in G$.

இதுபோல் $x' = e' * x' \quad \forall\, x \in G$

என்று நிரூபிக்கலாம்.

இவ்வாறு $x' * e' = e' * x' = x' \quad \forall\, x \in G$.

ஆனால் $x \longrightarrow x'$ என்பது முழுச்சார்பாகையால் H-ல் உள்ள ஒவ் வொரு மூலகமும் $x'$ என்னும் வடிவில்தான் இருக்கும். எனவே $e'$ என்பது $(H, *)$-ல் அலகாக உள்ளது. ஒரு குழுவில் இரண்டு அலகுகள் இருக்க முடியாதாகையால் $e'$ என்பது $(H, *)$-ன் அல காகும்.

**5·6. தேற்றம்:** $(G, .) \cong (H, *)$ என்க. $x \longrightarrow x'$ என்பது இங்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் முழு ஓரினச் சார்பு என்க $x^{-1}$ என்பது $x$ என்ற G-ன் மூலகத்தின் எதிர்மறையாக இருந்தால் $\left(x^{-1}\right)'$ என்பது $x'$-ன் எதிர்மறையாக $(H, *)$-ல் இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** $(x.y)' = x' * y'$. (ஓரினச் சார்பு)

$\therefore \quad (x.x^{-1})' = x' * (x^{-1})' \quad \ldots \qquad \ldots (1)$

ஆனால் $x\,x^{-1} = e$ [$e$ என்பது $(G, .)$-ன் அலகு என்க.]

$\therefore$ (1)-லிருந்து $e' = x' * (x^{-1})'$

இதுபோல் $(x^{-1})' * x' = e'$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

இவ்வாறு $x' * (x^{-1})' = (x^{-1})' * x' = e'$

ஆனால் $e'$ என்பது $(H, *)$-ன் அலகாகும்.

எனவே $(x^{-1})'$ என்பது $x'$-ன் எதிர்மறை மூலகமாகும்.

**5·7. தேற்றம்:** ஒரே முடியும் பரிமாணத்தைக் கொண்ட (same finite order) இரண்டு வட்டக் குழுக்கள் அமைப்பால் ஒன்றுனவை.

**நிரூபணம்:** $C_n$, $C_n'$ ஆகிய இரண்டும் '$n$' என்ற பரிமாணத்தைக் கொண்ட வட்டக் குழுக்கள் என்க. வட்டக் குழுக்களின் வரையறையின்படி

$$C_n = \langle a \rangle, \quad C_n' = \langle b \rangle \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்னும்படியாக $a$, $b$ என்ற இரு மூலகங்கள் முறையே $C_n$, $C_n'$ ஆகியவற்றில் இருக்கும். மேலும் பரிமாணம் '$n$' என்பதால் $a^n = e$, $b^n = e'$ என்பது வெளிப்படை. ... ... ... (2)

$C_n \longrightarrow C_n'$-க்கு $a^r \longrightarrow b^r$; $1 \leq r \leq n$ என்னும் சார்பை வரையறுக்க. இச்சார்பு ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்பு என்பது வெளிப்படை. ஏனெனில்,

$$C_n \left\{ e, a, a^2, \dots . a^{n-1} \right\} \;\&\; C_n' = \left\{ e^1, b, b^2 \dots\dots b^{n-1} \right\}$$

$$\text{மேலும் } a^r . a^s = a^{r+s} \longrightarrow b^{r+s} = b^r . b^s$$

அதாவது, $(x \,.\, y) \longrightarrow x' * y'$ என்றும் விதி உண்மையாக உள்ளது. அதாவது இச் சார்பு செயலைப் பாதுகாக்கிறது.

இவ்வாறு $C_n \cong C_n'$.

**5·8. தேற்றம்:** முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு வட்டக் குழுவும் $(Z, +)$ என்னும் வட்டக் குழுவுடன் அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்கும்.

**நிரூபணம்:** $(G, .)$ என்பது ஒரு முடியா வட்டக்குழு (infinite cyclic group) என்றும், '$a$' என்பது அதன் உருவாக்கி (generator) என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$$\text{இப்பொழுது } G = \left\{ a^i \,/\, i \in Z \right\} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

[$a^{-2}$ என்பது $a^{-1} . a^{-1}$ ஐக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்க.]

இப்பொழுது Z-லிருந்து G-க்கு $f : Z \longrightarrow G$ என்னும் சார்பை $f(n) = a^n$ ; $n \in Z$ என்று வரையறை செய்க.

இப்பொழுது $m, n$ ஆகிய இரண்டும் $a^m$, $a^n$ ஆகிய இரண்டு பிம்பங்களைக் கொண்டிருக்கும். $a^m = a^n$ என்றால், நீக்கல் விதிப்படி $a^{m-n} = e$ அல்லது $a^{n-m} = e$ என்று கிடைக்கும். ஆனால் $<a>$ என்பது முடியாக் குழுவாக இருப்பதால் $m-n=0$ அல்லது $n-m=0$ என்ற ஒரே ஒரு வழி தான் இருக்க முடியும். அதாவது $m=n$. அதாவது வெவ்வேறான இரு மூலகங்களுக்கு வெவ்வேறான பிம்பங்கள்தாம் உள்ளன. எனவே $f$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும்.

மேலும் (1)-லிருந்து, $f$ முழுச் சார்பாக இருக்கும் என்பது விளங்கும் மேலும் $f(m+n) = a^{m+n} = a^m \cdot a^n = f(m) \cdot f(n)$

அதாவது $f(m+n) = f(m) \cdot f(n)$

அதாவது $f$, செயலைப் பாதுகாக்கிறது.

எனவே, $f$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும்.

அதாவது $(Z, +) \cong (G, .)$ ... (தேற்றம் முடிவு).

**இயல் எண்களைப் பற்றிப் படிக்குங்கால் N என்ற இயற்கை எண்களின் கணத்துடன் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பின் மூலம் இணைக்க முடியாத கணங்கள் பல உள்ளன என்பதைப் பார்த்தோம். இதில் R என்ற மெய் எண்களின் கணத்தின் இயல் எண் (cardinal number, cardinality) C என்று பார்த்தோம். தேற்றம் 5·8 ஐப் பயன்படுத்துங்கால் "ஒரு கணத்தின் இயல் எண் C அல்லது அதை விடக் கூடுதலாக இருந்தால் அக் கணத்தில் ஓர் ஈருறுப்புச் செயலியை வரையறுத்து, அதை வட்டக் குழு ஆக்க முடியாது" என்பது விளங்கும். இதையே பின்வரும் கிளைத் தேற்றமாகக் கூறலாம்.**

**கிளைத்தேற்றம் :** $(G, .)$ ஒரு வட்டக்குழு என்றால், (இயல் எண்களுக்கிடையில் வரையறுக்கப்படும் '$<$' என்ற தொடர்பின் கீழ் ch. I. Sec. 7), $|G| \leq \aleph_0$.

ஒரு வட்டமான அட்டையின் நிலைமாற்றக் குழு வட்டக் குழு அல்ல என்று எ. கா. 4·5 ஐ அடுத்து நாம் குறிப்பிட்டதற்கும் இதுவே காரணம்.

5·9. தேற்றம் : முடியா வட்டக் குழுவின் (Infinite cyclic group) உட்குழுக்கள் அனைத்தும் முடியா வட்டக் குழுக்களே. இவ்விரு குழுக்களும் அமைப்பில் ஒன்றுனவை.

நிரூபணம் : (H .) என்பது (G, .) என்ற முடியா வட்டக் குழுவின் உட்குழு என்க. '$a$' என்பது (G, .)-ன் உருவாக்கி என்க. இப்பொழுது $G = \left\{ a^i \,/\, i \in Z \right\}$.

எனவே, H-ன் மூலகங்களும் $a^i$, $i \in Z$ என்னும் வடிவில் தாம் இருக்கும். $a^p \in H$ என்னும்படியாக $p$-க்கு உள்ள நேர்த்திசை (+ve) மதிப்புகளில் மிகவும் சிறியது $m$ என்க. ... (1)

இப்பொழுது நாம் $H = \langle a^m \rangle$ என்று நிரூபிப்போம்.

$a^n$ என்பது H-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $n = qm + r$ ; $0 \le r < m$ என்னும்படியாக $q$, $r$ என்னும் முழு எண்கள் உள்ளன. இப்பொழுது $n - qm = r$ ... ... (2)

$q > 0$ என்க : $a^m \in H$

$\therefore \; a^{-m} \in H$

$\therefore \; a^{-m} . a^{-m}, \ldots\ldots q$ தடவைகள் $\in H$

அதாவது, $a^{-qm} \in H$. ... ... (3)

$q < 0$ என்றால், $q = -s$ & $s > 0$ என்க.

இப்பொழுது $a^m \in H$

$\therefore \; a^m . a^m \ldots\ldots s$ தடவைகள் $\in H$

அதாவது $a^{sm} \in H$

அதாவது $a^{(-q)m} \in H \Longrightarrow a^{-qm} \in H$ ... ... (4)

இப்பொழுது $a^n, a^{-qm} \in H$ ((3), (4) ஆகியவற்றையும் உபயோகித்து)

$\therefore \; a^n . a^{-qm} \in H$ ((H, .) ஒரு குழு)

அதாவது $a^{n-qm} \in H$.

அதாவது $a^r \in H$. (2)-லிருந்து

ஆனால், $0 \leq r < m$; எனவே, (1)-லிருந்து $r = 0$ எனலாம்.

அதாவது $n = qm$; $q \in Z$.

$$\therefore \quad a^n = a^{qm} = (a^m)^q$$

அதாவது $a^n \in \langle a^m \rangle$

எனவே $H \subseteq \langle a^m \rangle$

மேலும் $a^m \in H$; எனவே $\langle a^m \rangle \subseteq H$.

[(H, .) குழுவாகையால்]

இவ்வாறு $\langle a^m \rangle = (H, .)$ ... ... (5)

மேலும் (G, .) என்பது முடியா வட்டக் குழுவாகையால்

$i \neq j \implies a^i \neq a^j$.

எனவே, $\langle a^m \rangle$-லும் முடியா அளவு மூலகங்கள் உள்ளன. அதாவது (H, .) என்பது முடியா வட்டக் குழுவாகும். ...

$\therefore$ முன் தேற்றப்படி $(Z, +) \cong (H, .)$ ... ... (7)

(G, .)-ம் முடியா வட்டக் குழுவாகையால் $(G, .) \cong (Z, +)$ (8)

(7), (8) ஆகியவற்றிலிருந்து $(G, .) \cong (H, .)$.

அமைப்பைப் பொறுத்த வரையில் குழுக்கள் என்பதற்கும், நிலைமாற்றக் குழுக்கள் என்பதற்கும் வித்தியாசம் இல்லை என்று முன்னரே குறிப்பிட்டுள்ளோம். இதைப் பின்வரும் கேய்லேயின் (Caylay) அடிப்படைத் தேற்றம் விளக்குகின்றது.

**5·10. தேற்றம் :** (Cayley's theorem) : ஒவ்வொரு குழுவும் ஒரு நிலைமாற்றக் குழுவுடன் (Transformation group) அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்கும்.

**நிரூபணம் :** (G, .) என்பது ஒரு குழு என்றும் $a$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றும் எடுத்துக் கொள்க. $\bar{a} : G \longrightarrow G$ என்னும் நியமனத்தை $x \longrightarrow x \,.\, a$ என்று வரையறை செய்க. இப்பொழுது G-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகம் $x$-க்கும் தனித்த ஒரு பிம்பம் $(x \,.\, a)$ உள்ளது. எனவே $\bar{a}$ என்பது ஒரு சார்பாகும்.

மேலும் $x.a = y.a \implies x = y$. எனவே $\bar{a}$ ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாகும். அத்துடன் $p \in G$ என்றால் $p = (pa^{-1})\, a$ எனலாம்.

எனவே $p \in G$ என்ற மூலகத்திற்கு $\bar{a}$-ன் கீழ் $(pa^{-1})$ என்ற மூல பிம்பம் (pre image) உள்ளது. ஆகவே $\bar{a}$ ஒரு முழுச் சார்பாகும். இவ்வாறு $\bar{a} : G \longrightarrow G$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாகும். அதாவது $\bar{a}$, G-ன் நிலைமாற்றமாகும். இதுபோலவே G-ன் ஒவ்வொரு மூலகம் $\bar{x}$-க்கும், $\bar{x}$ என்ற நிலைமாற்றம் ஒன்று உள்ளது.

$$P = \left\{ \bar{a} \,/\, a \in G \right\} \text{ என்க.} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

P-ல் உள்ள மூலகங்களுக்கிடையில் * என்ற செயலியைப் பின் வருமாறு வரையறுக்க.

$\bar{a} * \bar{b}$ = முதலில் $\bar{a}$ ஐயும் பின்னர் $\bar{b}$ ஐயும், செய்தால் கிடைக்கும் சார்பு. (P, * ) ஒரு குழு என்பதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

(i) $\bar{a} \in P$, $\bar{b} \in P$ என்க.

$\bar{a}$-ன் கீழ் $x \longrightarrow x.a$

$\bar{b}$-ன் கீழ் $(x\,a) \longrightarrow (x.a).b$

அதாவது $\bar{a} * \bar{b}$-ன் கீழ் $x \longrightarrow (x.a).b = x.(a.b)$

எனவே $\bar{a} * \bar{b} = \overline{a\,.\,b} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

அதாவது * என்ற செயலியின் கீழ் P என்ற கணம் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(ii) $(\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c} = \overline{(a.b)} * \bar{c}$ (2)-லிருந்து

$= \overline{(a.b)c}$ (2)-லிருந்து

$= \overline{a\,.\,(b.c)}$ (G, .)-ல் உள்ள சேர்ப்பு விதி

$= \bar{a} * \overline{(b.c)}$ (2)-லிருந்து

$= \bar{a} * \overline{(b * c)}$ (2)-லிருந்து

அதாவது * என்ற செயலி P-ல் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

(iii) $e$ என்பது $(G, .)$-ல் அலகாக இருந்தால் $\bar{e}$ என்பது $(P, *)$-ல் அலகாக இருக்கும். ஏனெனில் $a$ என்பது $G$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றால்,

$$\bar{a} * \bar{e} = \overline{a.e} = \bar{a} \qquad ((2)\text{-ன்படி})$$

இதுபோல் $\bar{e} * \bar{a} = \bar{a}$

இவ்வாறு $\bar{a} * \bar{e} = \bar{e} * \bar{a} = \bar{a} \quad \forall\, a \in P.$

(iv) $G$-ல், $a^{-1}$ என்பது $a$-ன் எதிர்மறை என்றால், P-ல் $\overline{a^{-1}}$ என்பது $\bar{a}$-ன் எதிர்மறையாகும்.

$$\therefore \quad \bar{a} * \overline{a^{-1}} = \overline{a \,.\, a^{-1}} = \bar{e}$$

இதுபோல் $\overline{a^{-1}} * \bar{a} = \overline{a^{-1}\, a} = \bar{e}$

அதாவது P-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை உள்ளது. (i), (ii), (iii), (iv) ஆகியவற்றிலிருந்து, $\bar{a}$ முதலியவை நிலைமாற்றங்களாக இருப்பதால் $(P, *)$ ஒரு நிலைமாற்றக் குழுவாகும். ... ... ... ... (3)

இப்பொழுது, $(G, .)$, $(P, *)$ ஆகிய குழுக்களுக்கிடையில் $f : G \longrightarrow P$ என்னும் சார்பை $a \longrightarrow \bar{a}$ என்று வரையறை செய்க. $f$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்பது வெளிப்படையாகும். ((1)-லிருந்து) மேலும்,

$$a \longrightarrow \bar{a}\,, \quad b \longrightarrow \bar{b} \text{ என்றால்}$$

$$a \,.\, b \longrightarrow \overline{a \cdot b} = \bar{a} * \bar{b} \qquad [(2)\text{-ன்படி}]$$

அதாவது $f(a\,.\,b) = f(a) * f(b)$

எனவே $f$ முழு ஓரினச் சார்பாகும். $\therefore (G, .) \cong (P, *)$.

எனவே (3)-லிருந்து "ஒவ்வொரு குழுவும் ஒரு நிலைமாற்றக் குழுவுடன் அமைப்பில் ஒன்றாயிருக்கிறது" என்பது தெளிவாகிறது.

இங்கு நாம் எடுத்துக்கொண்ட $(G, .)$ என்ற குழு '$n$' என்ற முடியும் பரிமாணத்தை உடையதாக இருந்தால் $(P, *)$ என்ற குழுவிலும் $n$ மூலகங்களே இருக்கும். P-லுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும், "$n$ பொருட்களின் மேலான ஒரு வரிசை மாற்றமாகும்." மேலும்,

$(P, *)$ ஒரு குழுவாக உள்ளது. $n$ பொருட்களின் மேலான வரிசை மாற்றக் குழு $S_n$-ல் [வரையறை 4·12] ∠$n$ மூலகங்களும், $(P, *)$-ல் '$n$' மூலகங்களும் உள்ளன. இவ்வாறு $(P, *)$, $S_n$-ன் உட்குழுவாக உள்ளது. எனவே பின்வரும் கிளைத்தேற்றத்தைக் கூறலாம்.

**கிளைத்தேற்றம்:** $n$ என்ற முடியும் பரிமாணத்தைக் கொண்ட $(G, .)$ என்ற எந்த ஒரு முடியும் குழுவும், "$n$ பொருட்களின் மேலான வரிசை மாற்றக் குழு" $S_n$-ன் உட்குழு ஒன்றுடன் அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்கும்.

## பயிற்சி

1. $(G, .) \cong (H, *)$ என்க. G-ல் உள்ள ஒரு மூலகத்தின் பரிமாணமானது H-ல் உள்ள அதன் பிம்பத்தின் பரிமாணத்திற்குச் சமமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

2. $f . G \longrightarrow H$ என்பது $(G, .)$-லிருந்து $(H, X)$-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட முழு ஓரினச் சார்பு என்றால், $f^{-1} : H \longrightarrow G$ என்பதும் முழு ஓரினச் சார்பாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

3. குழுக்களை மூலகமாகக் கொண்ட கணத்தில் '$\cong$' என்பது ஒரு சரிநிகர் தொடர்பு என்பதை முறையாக நிரூபிக்க.

4. $f: X \longrightarrow Y, g: X \longrightarrow Y$ என்பவை $(X, .)$-லிருந்து $(Y, *)$-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள இரண்டு முழு ஓரினச் சார்புகள் என்றால் $f^{-1} . g : Y \longrightarrow Y$ என்பது $(Y, *)$-லிருந்து, $(Y, *)$-க்கு வரையறுக்கப் பட்ட முழு ஓரினச் சார்பு என்றும், $g : f^{-1} : X \longrightarrow X$ என்பது $(X, .)$-லிருந்து $(X, .)$-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட முழு ஓரினச் சார்பு என்றும் நிரூபிக்க. [$f^{-1} . g$ என்றால் முதலில் $f^{-1}$; பின்னர் $g$ என்று வரையறுத்துள்ளோம்.]

5. பின்வரும் மூன்று குழுக்களும் ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பால் ஒன்றுனவை என்று நிரூபிக்க.

(i) $(\{1, i, -1, -i\}, .)$
(i) $(Z_5 - \{0\}, .)$
(iii) $(\{1, 3, 7, 9\}$, 10-ன் சுற்றுக்கான கூட்டல்)
(iv) $C_4$.

6. (G, .) என்பது ஒரு குழு என்க. G-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் $\odot$ என்னும் செயலியை $a \odot b = b.a$ என்று வரையறுக்க. இப்பொழுது (G, $\odot$) என்பது ஒரு குழுவாக இருக்கும். "(G, $\odot$), (G, .) ஆகிய இரு குழுக்களும் $a \longrightarrow a$ என்ற சார்பின் கீழ் அமைப்பில் ஒன்றாக (isomorphic) இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை "(G, . ) ஒரு பரிமாற்றுக் குழு" என்று நிரூபிக்க.

7. பின்வரும் குழுக்கள் அமைப்பால் ஒன்றானவை என்று காட்டுக.

(i) $D_4$

(ii) இருபுறமும் ஓரே மாதிரியாகத் தோன்றும் சதுரமல்லாத ஒரு செவ்வக அட்டையின் நிலை மாற்றக் குழு.

(iii) $x=\{a, b\}$ என்று இருக்கும்போது (P(X) . $\triangle$) என்ற குழு.

8. ஒரு குழு பரிமாற்றுக் குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை "$x \longrightarrow x^{-1}$ என்பது ஓர் ஓரினச் சார்பு" என்று நிரூபிக்க.

9. (X, .) என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. X-லிருந்து X-க்கு வரையறுக்கப்படக்கூடிய ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்புகள் அனைத்தும் சேர்ந்து ஒரு குழுவாகும் என்று நிரூபித்துள்ளோம். [எ. கா. 1·14]. இக் குழுவின் உட்குழு ஒன்றுடன் (X, . ) என்ற குழு அமைப்பில் ஒன்றாயிருக்கும் என்று நிரூபிக்க (Cayley's தேற்றத்தை உபயோகிக்கலாம்).

10. தேற்றம் 5·10-ல் $\overline{a}$ என்ற சார்பை $x \longrightarrow a \, . \, x$ என்று வரையறுத்தால் $\overline{a} * \overline{b}$ என்பதை எவ்வாறு வரையறுக்க வேண்டும் என்பதைக் காண்க. இவ்வரையறைகளின் அடிப்படையில் தேற்றத்திற்கு முழு நிரூபணம் கொடுக்கவும்.

# 6. உப கணங்கள்

**(Cosets)**

ஒரு குழுவின் பரிமாணத்திற்கும் அதன் மூலகங்களின் பரிமாணத்துக்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன என்பதை அறிவதற்கும், ஒரு குழுவின் பரிமாணத்திற்கும் அதன் உட் குழுக்களின் பரிமாணத்திற்கும் உள்ள தொடர்பு என்ன என்பதை அறிவதற்கும் உப கணங்கள் பற்றிய கோட்பாடுகள் தேவைப்படுகின்றன. இவற்றிலிருந்து "ஒரு குழுவின் பரிமாணமானது அதன் உட்குழுவின் பரிமாணத்தின் மடங்காக இருக்கும்" என்னும் முக்கியமான உண்மையைப் பெறலாம்.

**6·1.** வரையறை : (H, .) என்பது (G, .) என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. $a$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $a$H என்னும் G-ன் உட்கணத்தை $_a\mathrm{H} = \left\{ a.h \,/\, h \in \mathrm{H} \right\}$ என்று வரையறை செய்தால் $a$H என்பது (H, . )-ன் ஓர் இடது உப கணம் (left coset) எனப்படும். இதுபோல் $\mathrm{H}_a = \left\{ h.a \,/\, h \in \mathrm{H} \right\}$ என்ற கணம் (H, .)-ன் ஒரு வலது உப கணம் (right coset) எனப்படும்.

$b$ என்பது G-ன் இன்னொரு மூலகம் என்றால், $_b$H என்பதுவும் ஓர் இடது உப கணமாகும். இதுபோல் $\mathrm{H}_b$ என்பது ஒரு வலது உப கணமாகும்.

**6·2.** எ. கா. : $D_6$-க்கான பெருக்கல் அட்டவணையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

| . | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $e$ | $z$ | $x$ | $y$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $e$ | $a$ | $y$ | $z$ | $x$ |
| $x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $e$ | $a$ | $a^2$ |
| $y$ | $y$ | $z$ | $x$ | $a^2$ | $e$ | $a$ |
| $z$ | $z$ | $x$ | $y$ | $a$ | $a^2$ | $e$ |

இதில் $\{e, x\}$ = H என்க.

$(H, .)$ ஓர் உட்குழு என்பது தெளிவு. இப்பொழுது நாம் H-ன் வலது உப கணங்களையும் இடது உப கணங்களையும் கண்டு பிடிப்போம்.

$$\begin{aligned}
{}_eH &= e\ \{e, x\} &= \{e.e, e\,x\} &= \{e, x\} \\
{}_aH &= a\ \{e, x\} &= \{a.e, a.x\} &= \{a, z\} \\
{}_{a^2}H &= a^2\{e, x\} &= \{a^2.e, a^2.x\} &= \{a^2, y\} \\
{}_xH &= x\ \{e, x\} &= \{x.e, x^2\} &= \{x, e\} \\
{}_yH &= y\ \{e, x\} &= \{y.e, y.x\} &= \{y, a^2\} \\
{}_zH &= z\ \{e, x\} &= \{z.e, z.x\} &= \{z, a\} \\
& H_e & \{e.e, x.e\} &= \{e, x\} \\
& H_a &= \{e.a, x.a\} &= \{a, y\} \\
& H_{a^2} &= \{e.a^2, x\,a\} &= \{a^2, z\} \\
& H_x &= \{e.x, x.x\} &= \{x, e\} \\
& H_y &= \{e\,.\,y, x\,.\,y\} &= \{y, a\} \\
& H_z &= \{e\,.\,z, x\,.\,z\} &= \{z, a^2\}
\end{aligned}$$

மேலே நாம் கண்டுபிடித்திருக்கும் வலது உப கணங்கள், இடது உப கணங்கள் ஆகியவற்றிலிருந்து பின்வரும் குணங்களைக் காணலாம்.

எவையேனும் இரண்டு இடது உப கணங்களைப் பார்த்தால் அவை தமக்குள் சமமாகவோ அல்லது பொதுவான மூலகம் இல்லாமலோ இருக்கின்றன. இதுபோலவே வலது உப கணங்களும் இருக்கும்.

நாம் எடுத்துக்கொண்ட உட்குழு $(H, \cdot)$-ல் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை மூலகங்கள் H-ன் உப கணங்களிலும் உள்ளன.

வலது உப கணம் ஒன்று இடது உப கணமாகவும் இருக்க வேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை. இங்கு $\{a^2, y\}$ என்பது ஓர் இடது உப கணம். ஆனால் $\{a^2, y\}$ என்பது வலது உப கணம் அல்ல. கொடுத்திருக்கும் குழு பரிமாற்றுக் குழுவாக இருந்தால் வலது உப கணங்களும் இடது உப கணங்களும் ஒன்ருக இருக்கும். அதாவது, $H_a = {}_aH$; ஏனெனில் $a\,.\,h = h\,.\,a \;\forall\; a, h \in G$. ஆனால் $H_a = {}_aH$ என்பதனுல் குழு பரிமாற்றுக் குழு என்ருே அல்லது $a\,.\,h = h\,.\,a \;\forall h \in H$ என்ருே நாம் எடுத்துக்கொள்ள முடியாது. ${}_aH = H_a$ என்பது, கணங்களாகப் பார்க்கும்போது இவை இரண்டும் ஒன்று என்பதையே குறிக்கின்றது.

மேலே நாம் கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில் வெவ்வேறான (distinct) மூன்று இடது உப கணங்களும் வெவ்வேறான மூன்று வலது உப கணங்களும் உள்ளன. அதாவது வெவ்வேறான இடது உபகணங்களின் எண்ணமும் வெவ்வேறான வலது உப கணங்களின் எண்ணமும் சமமாக இருக்கின்றன.

குழுவில் உள்ள எந்த மூலகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும் அது ஓர் இடது உப கணத்திலும் ஒரு வலது உப கணத்திலும் உள்ளது. மேலே கொடுத்துள்ள எடுத்துக்காட்டில் $G=\{e, a, a^2, x, y, z\}$. வெவ்வேறான இடது உபகணங்கள் $\{e, x\}$, $\{a, z\}$, $\{a^2, y\}$ ஆகியவையாகும். இப்பொழுது இம் மூன்று உப கணங்களும் சேர்ந்து ஒரு கூறை (partition) ஏற்படுத்துகின்றன. இதுபோலவே வெவ்வேறான வலது உப கணங்களான $\{e, x\}$, $\{a, y\}$, $\{a^2, z\}$ ஆகியவை சேர்ந்து ஒரு கூறை ஏற்படுத்துகின்றன.

மேலே நாம் கொடுத்துள்ள கருத்துகளில் எவை எவை இக் குழுவில் மட்டும் இருப்பவை, எவை எவை எல்லாக் குழுக்களுக்கும் பொருந்துபவை என்பதைப் பின்வரும் தேற்றங்கள் விளக்கும்

**6·3. தேற்றம்:** $(H, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. G-ன் எந்த ஒரு மூலகமும் H-ன் ஒரு வலது உப கணத்திலாவது இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** $a$ என்பது G-ன் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இப்பொழுது $H_a$ என்னும் வலது உபகணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$e \in H \text{ என்பதால் } e \cdot a = a \in H_a$$

இவ்வாறு $a$ என்ற மூலகம் $H_a$ என்ற வலது உப கணத்தில் உள்ளது.

**குறிப்பு:** இத்தேற்றம் H-ன் இடது உப கணங்களைப் பொறுத்த வரையிலும் உண்மையாக இருக்கும்.

**6·4. தேற்றம்:** எவையேனும் இரு வலது உபகணங்கள் ஒன்றாகவோ (identical) அல்லது தமக்குள் பொதுவான மூலகம் இல்லாமலோ (disjoint) இருக்கும்.

நிரூபணம்: $(H, .)$ என்பது $(G, \cdot)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. $H_a$, $H_b$ ஆகியவை H-ன் எவையேனும் இரண்டு வலது உப கணங்கள் என்க.

$H_a \cap H_b \mp \phi$ என்க.

எனவே $h_1 a = h_2 b$ என்னும்படியாக $h_1, h_2$ என்ற மூலகங்கள் H-ல் உள்ளன.

$$\therefore h_2^{-1} \cdot (h_1 a) = h_2^{-1} \cdot (h_2 b)$$

$$\text{அதாவது } \left(h_2^{-1} \cdot h_1\right) \cdot a = \left(h_2^{-1} \cdot h_2\right) \cdot b$$

$$\text{அதாவது } \left(h_2^{-1} \cdot h_1\right) \cdot a = b \qquad (1)$$

இப்பொழுது $h_k \cdot b$ என்பது $H_b$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது

$$h_k \cdot b = h_k \cdot \left[\left(h_2^{-1} \cdot h_1\right) \cdot a\right] \qquad \text{1-லிருந்து}$$

$$= \left(h_k \cdot h_2^{-1} \cdot h_1\right) \cdot a$$

$$= h \cdot a$$ ($h_k, h_2^{-1}, h_1$ ஆகியவை H-ன் மூலகங்கள் என்பதால் $h_k \cdot h_2^{-1} \cdot h_1 = h \in H$)

ஆனால் $h \cdot a \in H_a$.

எனவே $h_k \cdot b \in Hb \longrightarrow h_k \cdot b \in H_a$

$\therefore H_b \subseteq H_a$

இதுபோல் $H_a \subseteq H_b$ என்று நிருபிக்கலாம்.

எனவே $H_a = H_b$.

அதாவது $H_a, H_b$ என்ற வலது உப கணங்களில் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் பொதுவாக இருந்தால் அவ்விரு உப கணங்களும் ஒன்றாக இருக்கின்றன. எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**குறிப்பு :** இத்தேற்றம் இடது உப கணங்களைப் பொறுத்தவரையிலும் உண்மையாக இருக்கும். (இதை நிரூபிக்க.)

**6·5. தேற்றம் :** (H, . ) என்பது (H, . ) என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. $H_a$ என்பது (H, . )-ன் ஒரு வலது உப கணம் என்க. H-லிருந்து $H_a$-க்கு ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச்சார்பு ஒன்றை வரையறுக்க முடியும். [இதே தேற்றம் இடது உப கணங்களுக்கும் உண்மையாக இருக்கும்.]

**நிரூபணம் :** $Ha = \left\{ h.a \,/\, h \in H \right\}$

இப்பொழுது $f : H \longrightarrow H_a$ என்னும் நியமனத்தை

$f(h) = h.a$ என்று வரையறை செய்க. இங்கு H-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் தனித்த பிம்பம் இருப்பதால் $f$ ஒரு சார்பாகும். $h_1, h_2$ ஆகிய இரண்டு மூலகங்களின் பிம்பமும் ஒன்றுயிருந்தால் $h_1.a = h_2.a$. ஆனால் $h_1, a, h_2$ ஆகியவை (G, . ) என்ற குழுவின் மூலகங்களாகையால் வலது நீக்கு விதியை உபயோகித்து $h_1 = h_2$ என்று பெறலாம். அதாவது வெவ்வேறுன மூலகங்களின் பிம்பங்கள் ஒன்றுக இருக்க முடியாது. எனவே $f$ என்பது ஒன்றுக்கொன்றுன சார்பாகும்.

$H_a$-ல் உள்ள மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் $h.a$ என்னும் வடிவில் இருப்பதால் $H_a$-ன் ஒவ்வொரு மூலகம் $(h.a)$-க்கும் $h$ என்ற மூல பிம்பம் H-ல் இருக்கும். எனவே $f$ முழுச் சார்பாகும்.

இவ்வாறுக $f : H \longrightarrow H_a$ என்னும் ஒன்றுக் கொன்றுன முழுச் சார்பு ஒன்று உள்ளது.

குறிப்பு: H என்ற கணத்தில் முடியும் அளவு மூலகங்கள் இருக்கும்போது இத்தேற்றம் "ஓர் உட்குழுவில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை மூலகங்களே அதன் உப கணத்திலும் இருக்கும்" என்பதைக் கொடுக்கும்.

**6·6. தேற்றம் :** (H, . ) என்பது (G, . ) என்ற குழுவில் உட்குழு என்க. A, B என்பன H-ன் எவையேனும் இரண்டு(வலதும் இடதுமாகவும் இருக்கலாம்) உபகணங்கள் என்க. இப்பொழுது A-விருந்து Bக்கு ஒன்றுக் கொன்றுன முழுச்சார்பு ஒன்று உள்ளது.

**நிரூபணம் :** A என்பது H-ன் உபகணம்.

∴ $f : H \longrightarrow A$ என்னும் ஒன்றுக் கொன்றுன முழுச் சார்பு உள்ளது. (முன் தேற்றப்படி)

B என்பது H-ன் உப கணம்.

$\therefore$ $g : H \longrightarrow B$ என்ற ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு உள்ளது. (முன் தேற்றப்படி)

இப்பொழுது $f^{-1}.g$ என்பது A-லிருந்து B-க்கு வரையறுக்கப் பட்டிருக்கும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாக இருக்கும்.

(முன்னைய தேற்றங்களின்படி)

**குறிப்பு :** முடியும் உட்குழுக்களைப் பொறுத்தவரையில் இத் தேற்றம் ஓர் உப கணத்தில் எத்தனை மூலகங்கள் உள்ளனவோ அத்தனை மூலகங்களே வேறு எந்த உபகணத்திலும் இருக்கும்'' என் பதைக் கொடுக்கும். மொத்தத்தில் இது ''எந்த இரு உப கணங்களை எடுத்துக்கொண்டாலும் அவை ஓரே இயல் எண்ணைக் கொண் டுள்ளன'' என்பதைக் குறிப்பிடும்.

**6·7. தேற்றம் :** $(H, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட் குழு என்க. $r, s$ ஆகிய இரண்டும் G-ன் மூலகங்கள் என்க. $H_r = H_s$ என்று இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை $r.s^{-1} \in H$ என்பதாகும்.

**நிரூபணம் : I.** தேவையானது என்று காட்ட :

$$H_r = H_s \text{ என்க.}$$

$$e \in H. \quad \therefore \quad e.r \in H_r$$

$H_r = H_s$ என்பதால் $e . r = h . s$ என்னும்படியாக $h$ என்னும் மூலகம் H-ல் உள்ளது.

அதாவது $r = h.s, \; h \in H$

$$\therefore \quad r.s^{-1} = (h\,s).s^{-1}$$

$$= h.(s.s^{-1})$$

$$= h.e$$

$$\therefore \quad r\,.\,s^{-1} = h \in H.$$

II. போதுமானது என்று காட்ட :

$r.s^{-1} \in H$ என்க.

$\therefore$ $r.s^{-1} = h$ என்னும்படியாக $h$ என்னும் மூலகம் H-ல் உள்ளது.

$\therefore \; r = h.s \;\; \& \;\; h \in H$ ... ... (1)

$e$ என்ற மூலகம் H-ல் இருப்பதால் $e.r = r \in H_r$ ... (2)

மேலும் $h \in H$ என்பதால் $h.s \in H_s$ ... ... (3)
இப்பொழுது (1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $r = h.s$ என்ற மூலகம் $H_r$, $H_s$ ஆகிய இரு வலது உப கணங்களிலும் உள்ளது.

$\therefore \; H_r = H_s$ (தேற்றம் 6·4-லிருந்து)

**6·8.** வரையறை: $(H, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. H-ன் வெவ்வேறான (distinct) வலது உப கணங்களின் எண்ணிக்கையை $(G, .)$-ல், $(H, .)$-ன் அடுக்கு (index) என்கிறோம்.

**6·9.** எ.கா.: எ. கா. 6·2-ல் $(\{e, x\}, .)$ என்ற உட்குழுவின் அடுக்கு Z ஆகும்.

**6·10.** தேற்றம்: லேக்ரேஞ்ச் தேற்றம்: Lagrang's Theorem: $(H, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற முடியும் குழுவின் உட்குழு என்க.

இப்பொழுது $(H, .)$-ன் பரிமாணமானது $(G, .)$-ன் பரிமாணத்தின் காரணியாக இருக்கும்.

நிரூபணம்: $(H, .)$-ன் வலது உபகணங்களில் $H_{a1}\, H_{a2} \cdots H_{ar}$ ஆகியவை வெவ்வேறானவை என்க. (G-ல் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருப்பதால், முடியும் அளவு வெவ்வேறான வலது உப கணங்களே இருக்க முடியும். இவற்றின் எண்ணிக்கையை நாம் $r$ என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.)

$A = H_{a1} \cup H_{a2} \cdots\cdots \cup H_{ar}$ என்க. ... ... (1)

இப்பொழுது ஒவ்வொரு $H_{ai}$-ம் G-ன் உட்கணமாக இருப்பதால் A என்பதுவும் G-ன் உட்கணமாகவே இருக்கும். அதாவது
$A \subseteq G$ ... ... ... ... (2)

மேலும் $x \in G$ என்றால் $x \in H_x$.

இப்பொழுது $a_1, a_2, \ldots\ldots a_r$ ஆகியவற்றுள் $x = a_i$ என்னும்படியாக ஒரு மூலகம் இருக்கலாம். இவ்வாறிருப்பின் $x \in H_{ai}$;
$\therefore \; x \in A$

அல்லது $H_x$ என்ற உப கணத்தோடு ஒன்ருன (identical) உப கணம் ஒன்று $H_{a1}, H_{a2}, \ldots\ldots H_{ar}$ ஆகியவற்றுள் இருக்கும் இப்பொழுதும் $x \in H_x$ என்பதனுல் $x \in A$.

இவ்வாருக $x \in G \Longrightarrow x \in A$. $\therefore G \subseteq A$ ... (3)

(2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $A = G$.

அதாவது $G = H_{a1} \cup H_{a2} \ldots\ldots \cup H_{ar}$ ... ... (4)

மேலும் $H_{ai}$ என்பவை வெவ்வேருன வலது உபகணங்கள் என்பதால்

$$i \neq j \Longrightarrow H_{ai} \cap H_{aj} = \phi.$$

மேலும் G-ல் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருப்பதால்

$$|G| = |H_{a1}| + |H_{a2}| + \ldots + |H_{ar}| \quad \ldots (5)$$

*(இங்கு எல்லாமே முடியும் கணங்கள் என்பதால் | A | என்பது A என்ற கணத்தில் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணத்தைக் குறிக்கும்.)*

$H_{ai}$ என்பவை (H, . )-ன் உப கணங்களாகையால் $H_{ai}$-ல் உள்ள மூலகங்களின் எண்ணிக்கை H-ன் பரிமாணத்திற்குச் சமமாக இருக்கும். இவ்வாறு *(5)*-லிருந்து

G-ன் பரிமாணம் = (H-ன் பரிமாணம்) + (H–ன் பரிமா மாணம்) + ...... $r$ தடவைகள்.

அல்லது, G-ன் பரிமாணம் = $r \times$ [H-ன் பரிமாணம்]

இங்கு $r$ என்பது வெவ்வேருன உபகணங்களின் எண்ணிக்கை என்பதால் முழு எண்ணுகும். எனவே *(H, . )*-ன் பரிமாணம் *(G, . )*-ன் பரிமாணத்தின் காரணியாகும்.

**6·11. தேற்றம்:** *(G, . )* என்ற முடியும் குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் *(G, .)*-ன் பரிமாணத்தின் காரணியாகும்.

**நிரூபணம்:** $a$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $a$-ன் பரிமாணமானது $< a >$ என்ற குழுவின் பரிமாணத்திற்குச் சமமாக இருக்கும் என்பது தெரிந்தது. ஆனுல் $< a >$ என்பது *(G, . )*-ன் பரிமாணத்தின் காரணியாக இருக்கும்

(லேக்ரேஞ்ச் தேற்றத்தின்படி). எனவே, $a$-ன் பரிமாணம், (G, . )-ன் பரிமாணத்தின் காரணியாக இருக்கும்.

6·12. தேற்றம் : (G, . ) என்ற முடியும் குழுவின் பரிமாணம் வகுபடா எண்ணாக (பகா எண், Prime number) இருந்தால் (G, .)-க்கு முறையான உட்குழுக்கள் இல்லை.

நிரூபணம் : (G , . )-ன் பரிமாணம் $p$ என்க.

(G , . )-க்கு (H, . ) என்ற முறையான உட்குழு இருப்பதாகக் கொள்வோம். இப்போது (H, . )-ன் பரிமாணம் $r$, $1<r<p$ என்று இருக்கும். லேக்ரேஞ்ச் தேற்றத்தின்படி இந்த $r$, $p$-ன் காரணியாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் $p$ என்பது பகா எண் ஆகையால் இது உண்மை அல்ல. எனவே (G, . )-க்கு முறையான உட்குழு இருக்க முடியாது.

6·13. தேற்றம் : (G, . ) என்ற முடியும் குழுவின் பரிமாணம் வகுபடா எண்ணாக (prime number) இருந்தால் (G, . ) ஒரு வட்டக் குழுவாகும்.

நிரூபணம் : (G, . )-ல் அலகு மட்டுமே இருப்பதாக எடுத்துக் கொண்டால் அந்த அலகானது (G, . ) என்ற குழுவை உருவாக்குகின்றது எனவே (G, . ) ஒரு வட்டக் குழு. (G, . )-ல் அலகைத் தவிர '$a$' என்ற ஒரு மூலகம் இருப்பதாகக் கொள்க. இப்பொழுது $<a>$ என்பது (G, . )-ன் முறையான உட்குழுவாக இருக்க முடியாது. [முந்தைய தேற்றப்படி; தேற்றம் 6·12.] மேலும் இது அலகை மட்டும் கொண்டதும் அல்ல. எனவே $<a> = (G, . )$. அதாவது (G, . ) ஒரு மூலகத்தினால் உருவாக்கப்படுகிறது. எனவே ( G, . ) என்பது வட்டக் குழுவாகும்.

குறிப்பு : இத் தேற்றத்திலிருந்து $p$ என்பது வகுபடா (prim எண் என்றால், $p$ என்னும் பரிமாணத்தைக் கொண்ட ஒரே ஒ குழுதான் உள்ளது என்பதும், இக்குழு $C_p$ தான் என்பது விளங்கும்.

### பயிற்சி

1. $V_4$-ன் உட்குழுக்களை எழுதி அவற்றின் உப கணங்களை காண்க.

2. $D_8$-ன் உட்குழுக்களை எழுதி அவற்றின் உப கணங்களை காண்க.

3. லேக்ரேஞ்ச் தேற்றத்தை உபயோகித்து $(\{0,1,2,3,5\},+)$ என்பது $(Z_{12},+)$-ன் உட்குழுவாக இருக்க முடியாது என்று நிரூபிக்க.

4. $(G,.)$ என்ற முடியும் குழுவின் உட்குழு ஒன்றின் அடுக்கு (index), $(G,.)$-ன் பரிமாணத்தின் காரணி (factor) யாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

5. $(C,.)$ என்பது $(G,.)$ என்ற குழுவின் மையம் (centre) என்க. $(C,.)$-ன் வலது உபகணங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஓர் இடது உப கணம் என்று நிரூபிக்க.

$$\left[ C = \left\{ x \Big/ \begin{array}{l} x \in G \\ x . a = a . x \quad \forall\, a \in G \end{array} \right\} \text{ என்று வரையறுத்தோம்.} \right]$$

6. 2 என்னும் அடுக்கினை (index) உடைய உட்குழுவின் ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் ஓர் இடது உபகணம் என்று நிரூபிக்க.

7. $(H,.)$ என்பது $(G,.)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. வலது உபகணம் ஒன்றிலுள்ள மூலகங்களின் எதிர்மறை மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் ஓர் இடது உபகணம் என்று நிரூபிக்க.

8. $(A,.)$, $(B,.)$ ஆகிய இரண்டும் $(G,.)$ என்ற குழுவின் உட் குழுக்கள் என்க. $(A \cap B,.)$-ன் உபகணங்கள் ஒவ்வொன்றும் $(A,.)$-ன் ஓர் உபகணத்திற்கும், $(B,.)$-ன் ஓர் உபகணத்திற்கும் உள்ள வெட்டு (intersection) என்று நிரூபிக்க.

9. $(H,.)$ என்பது $(G,.)$ என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. G-ன் மூலகங்களில் R என்னும் தொடர்பை (relation) $_aR_b \Longleftrightarrow a . b^{-1} \in H$ என்று வரையறை செய்க. R என்பது சரிநிகர் தொடர்பு என்று நிரூபிக்க. R ஐ அடிப்படையாகக் கொண்ட G-ன் சரிநிகர் இனங்கள் (equivalence classes) H-ன் வலது உபகணங்களாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க. இதே கணக்கை இடது உப கணங்களுக்குப் பொருந்தும்படியாக மாற்றுக. (தேற்றம் 6·7 உபயோகப்படலாம்.)

10. $(G,.)$ என்ற முடியும் குழுவின் பரிமாணம் வகுபடா எண்ணாக இருந்தால் அலகு நீங்கலாக உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் அதே வகுபடா எண் என்றும், அத்தகைய மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் $(G,.)$ஐ உருவாக்குகின்றன என்றும் நிரூபிக்க.

11. (H , . ) என்பது (G , . )-ன் உட்குழு என்ருல் பின்ருல் கொடுத்திருப்பவற்றை நிருபிக்க.

(i) $a \in H \Longleftrightarrow H_a = H$

(ii) $a \in H \Longleftrightarrow {}_aH = H$

(iii) $a, b$ என்பவை G-ல் இருக்கும்போது
$H_a \neq H_b \Longleftrightarrow a^{-1}H \neq b^{-1}H.$

(iv) $a, b$ என்பவை G-ல் இருக்கும்போது
$H_a = H_b \Longleftrightarrow a^{-1}H = b^{-1}H.$

12. 2 என்னும் பரிமாணத்தை உடைய மூலகம் ஒன்று ஒரு முடியும் குழுவில் இருக்குமாளுல் அக் குழுவில் உள்ள அத்தகைய மூலகங்களின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை (odd) எண் என்று நிருபிக்க.

(லேக்ரேஞ்ச் தேற்றத்தையும், குழுவின் பெருக்கல் அட்டவணையில் " அலகு, மூலைவிட்டத்திலோ அல்லது இரண்டிரண்டாக மூலை விட்டத்தின் இரண்டு பக்கங் களிலும் ஒரே மாதிரியான இடங்களிலோ இருக்கும்" என்பதையும் உபயோகிக்கலாம்.)

13. ஒரு வகுபடா எண்ணை (prime number) பரிமாணமாகக் கொண்ட ஒவ்வொரு குழுவும் பரிமாற்றுக் குழு என்று நிருபிக்க. [தேற்றங்கள் 6·13, 3·19 ஆகியவை உதவலாம்.]

# 7. நேர்மை உட்குழுக்கள்

## (Normal Sub-groups)

7·1. வரையறை : (G , . ) என்பது ஒரு குழு என்க. ஏதேனும் ஓர் உட்குழுவின் ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் ஓர் இடது உப கணமாக இருந்தால் அந்த உட்குழு நேர்மை உட்குழு (Normal sub-group, Invariant sub-group, Self-conjugate sub-group, Distinguished sub-group) எனப்படும். (N, .) என்பது (G, .) என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழு என்பதை (N , . ) $\lhd$ (G , . ) என்றோ அல்லது N $\lhd$ G என்றோ குறிப்பிடலாம்.

7·2. தேற்றம் : (N , . ) என்ற ஓர் உட்குழு (G , . ) என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமான நிபந்தனை $gN = Ng \quad \forall\, g \in G$ என்பதாகும்.

நிரூபணம் : I தேவையானது என்று காட்ட :

(N , . ) $\lhd$ (G , . ) என்க.

$g$ என்பது G-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$g \in gN$ ; அத்துடன் $g \in Ng$ ($e \in N$ என்பதால்)

மேலும் $gN$ என்ற இடது உப கணம் ஒரு வலது உப கணமாகவும் இருக்கும். இப்போது $gN$, $Ng$ ஆகிய இரு உப கணங்களுக்கும் $g$ என்ற பொதுவான மூலகம் உள்ளது. எனவே தேற்றம் 6·4-லிருந்து $gN = Ng$

இவ்வாறு $N \lhd G \Longrightarrow gN = Ng \quad \forall\, g \in G.$

II போதுமானது என்று காட்ட:

$gN = Ng \quad \forall g \in G$ என்க.

(N , . ) என்ற உட்குழுவின் ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் $Ng : g \in G$ என்ற வடிவிலும், ஒவ்வோர் இடது உபகணமும் $Ng : g \in G$ என்னும் வடிவிலும் இருப்பதால், $gN = Ng \ \forall g \in G$ $\Longrightarrow$ ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் ஓர் இடது உபகணம். எனவே தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

ஆனால் $gN = Ng \quad \forall \ g \in G$ என்பதிலிருந்து நாம் $g.n = n.g$ $\forall \ n \in N \ \& \ g \in G$ என்று சொல்ல முடியாது. ஆனால், " $n$, $g$ என்பவை முறையே N, G ஆகியவற்றின் மூலகங்களாக இருக்கும் போது $n.g = g.n_1$ என்னும்படியாக $n_1$ என்ற மூலகம் N-ல் உள்ளது," என்பது உண்மை.

7·3 எ. கா. : 8 என்னும் பரிமாணத்தை உடைய இருமுக நிலைமாற்றக் குழுவை ($D_8$) எடுத்துக் கொள்வோம்.

மூலகங்கள் : $e, a, a^2, a^3, h, ha, ha^2, ha^3$

விதிகள் : $a^4 = e = h^2$ ; $a \cdot h = h \cdot a^{4-1}$

$ah = ha^{4-1}$ என்பதிலிருந்து $a^r h = h.a^{n-r}$ என்றும் நிரூபித்துக் கொள்ளலாம்.

$e = 1, \ h.a = x, \ h.a^2 = y, \ h.a^3 = z$ என்று எழுதினால்

|  |  |  |  |  | $h$ | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cdot$ | $1$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $h$ | $h.a$ | $ha^2$ | $ha^3$ |
| $1$ | $1$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $h$ | $x$ | $y$ | $z$ |
| $a$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $1$ | $z$ | $h$ | $x$ | $y$ |
| $a^2$ | $a^2$ | $a^3$ | $1$ | $a$ | $y$ | $z$ | $h$ | $x$ |
| $a^3$ | $a^3$ | $1$ | $a$ | $a^2$ | $x$ | $y$ | $z$ | $h$ |
| $h$ | $h$ | $x$ | $y$ | $z$ | $1$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
| $= x$ | $x$ | $y$ | $z$ | $h$ | $a^3$ | $1$ | $a$ | $a^2$ |
| $ha^2 = y$ | $y$ | $z$ | $h$ | $x$ | $a^2$ | $a^3$ | $1$ | $a$ |
| $ha^3 = z$ | $z$ | $h$ | $x$ | $y$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ | $1$ |

என்னும் பெருக்கல் அட்டவணை கிடைக்கும். (நாம் முன்னர் $D_8$-ன் பெருக்கல் பலன்களைக் கண்டுபிடித்தது போல் இங்கும் கண்டு பிடிக்கலாம்.)

இக்குழுவில் $A = \{1, h\}$, $B = \{1, y\}$, $X = \{1, a^2\}$ ஆகியவை உட்குழுக்களாக இருக்கும். இவற்றின் வலது, இடது உப கணங்களைப் பின்வருமாறு காணலாம்.

| | |
|---|---|
| ${}_1A = \{1, h\}$ ✓ | $A_1 = \{1, h\}$ ✓ |
| $aA = \{a, z\}$ ✓ | $Aa = \{a, x\}$ ? |
| $a^2A = \{a^2, y\}$ ✓ | $Aa^2 = \{a^2, y\}$ |
| $a^3A = \{a^3, x\}$ ✓ | $Aa^3 = \{a^3, z\}$ |
| $hA = \{h, 1\}$ | $Ah = \{h, 1\}$ |
| $xA = \{x, a^3\}$ | $Ax = \{x, a\}$ |
| $yA = \{y, a^2\}$ | $Ay = \{y, a^2\}$ |
| $zA = \{z, a\}$ | $Az = \{z, a^3\}$ |

(இந்த உபகணங்களில் இரண்டாவது வரும் மூலகங்களை முறையே $h$ ஐத் தலைப்பில் கொண்டிருக்கும் நிலைவரிசை (நிரல் Column), கிடை வரிசை (நிரை, row) ஆகியவற்றிலிருந்து வரிசையாக எழுதி விடலாம்.)

| | |
|---|---|
| ${}_1B = \{1, y\}$ ✓ | $B_1 = \{1, y\}$ |
| $aB = \{a, x\}$ ✓ | $Ba = \{a, z\}$ ? |
| $a^2B = \{a^2, h\}$ ✓ | $Ba^2 = \{a^2, h\}$ |
| $a^3B = \{a^3, z\}$ ✓ | $Ba^3 = \{a^3, x\}$ |
| $hB = \{h, a\}$ | $Bh = \{h, a^2\}$ |
| $xB = \{x, a\}$ | $Bx = \{x, a^3\}$ |
| $yB = \{y, 1\}$ | $By = \{y, 1\}$ |
| $zB = \{z, a^3\}$ | $Bz = \{z, a\}$ |
| ${}_1X = \{1, a^2\}$ ✓ | $X_1 = \{1, a^2\}$ ✓ |
| $aX = \{a, a^3\}$ ✓ | $Xa = \{a, a^3\}$ ✓ |
| $a^2X = \{a^2, 1\}$ | $Xa^2 = \{a^2, 1\}$ |
| $a^3X = \{a^3, a\}$ | $Xa^3 = \{a^3, a\}$ |
| $hX = \{h, y\}$ ✓ | $Xh = \{h, y\}$ ✓ |
| $xX = \{x, z\}$ ✓ | $Xx = \{x, z\}$ ✓ |
| $yX = \{y, h\}$ | $Xy = \{y, h\}$ |
| $zX = \{z, x\}$ | $Xz = \{z, x\}$ |

இங்கு (A, . ) என்ற உட்குழுவின் உபகணங்களைப் பொறுத்தவரையில் $\{a, x\}$ என்ற வலது உப கணம் இடது உப கணமாக இல்லை.

எனவே (A, .) என்பது நேர்மை உட்குழு அல்ல. மேலும் (B, .) என்று உட்குழுவைப் பொறுத்தவரை $\{a, z\}$ என்ற உபகணம் இடது உபகணமாக இல்லை. எனவே (B, .) என்பதுவும் நேர்மை உட்குழு அல்ல.

(X, .) ஐப் பொறுத்தவரை $\{1, a^2\}$, $\{a, a^3\}$, $\{h, y\}$, $\{x, z\}$ என்பவை வெவ்வேறான இடது உபகணங்களாகும். இதே நான்கு கணங்களும்தாம் வெவ்வேறான வலது உபகணங்களாகவும் உள்ளன. அதாவது ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் ஓர் இடது உபகணமாகும். எனவே (G, .) என்பது நேர்மை உட்குழுவாகும் (Normal sub-group).

**7·4. தேற்றம்:** ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவின் ஒவ்வோர் உட்குழுவும் நேர்மை உட்குழுவாகும்.

நிரூபணம்: (H, .) என்பது (G, .) என்ற குழுவின் உட்குழு என்க. இப்பொழுது $h \in H, g \in G$ என்றால் $h \cdot g = g \cdot h$

எனவே $g$ என்ற G-ன் எந்த ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகத்தை எடுத்துக்கொண்டாலும்,

$$\left\{ h \cdot g \;/\; h \in H \right\} = \left\{ g \cdot h \;/\; h \in H \right\}$$ ; அதாவது

$$Hg = gH \quad \forall\, g \in G.$$

எனவே $(H, .) \lhd (G, .)$.

**7·5. தேற்றம்:** இரண்டு என்னும் அடுக்கினை உடைய ஒவ்வோர் உட்குழுவும் நேர்மை உட்குழுவாக இருக்கும்.

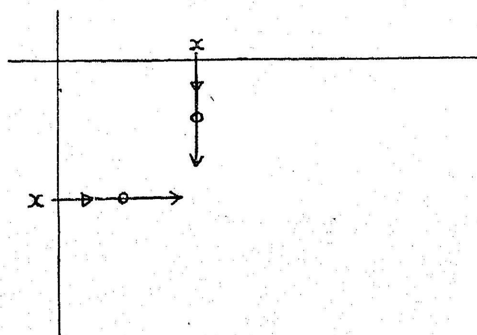
நிரூபணம்: (H, .) என்ற (G, .)-ன் உட்குழுவின் அடுக்கு 2 என்க. இப்பொழுது H-க்கு வெவ்வேறான இரண்டு வலது உபகணங்கள் மட்டுமே உள்ளன. அவை H, G − H என்பவை ஆகும். அதாவது $g \in H \Longrightarrow Hg = H$ & $g \notin H \Longrightarrow Hg = G - H$. இது போல் இடது உபகணங்களிலும் G, G − H ஆகிய இரண்டுமே வெவ்வேறானவையாக இருக்கும். எனவே H-ன் ஒவ்வொரு வலது உபகணமும் ஓர் இடது உபகணமாகும். இவ்வாறு (H, .) என்பது (G, .)-ன் நேர்மை உட்குழுவாகும்.

**7·6. வரையறை:** (G, .) என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க.

$C = \left\{ x \,/\, x \,.\, a = a \,.\, x \;\; \forall a \in G \right\}$ என்க. இப்பொழுது C என்ற கணம் (G , .) என்ற குழுவின் மையம் (centre) எனப்படும். இதை C (G) என்று குறிப்பிடலாம். உண்மையில் (C , .) ஒரு பரிமாற்று உட்குழுவாக இருக்கும்.

அதாவது $C = \left\{ x \,/\, \right.$ , G-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்துடனும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டுள்ளது $\left. \right\}$ எனலாம். (C , .) ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்பதை நிரூபிக்கவும்.

**7·7. எ.கா.:** (i) எடுத்துக்காட்டு 7·3-ல் கொடுத்துள்ள $D_8$ என்ற குழுவில் $X = \{1, a^2\}$ என்பது மையமாகும். $x$ என்பது ஒரு முடியும் குழுவின் மையத்தில் இருந்தால் அக் குழுவின்




படம் 21.

பெருக்கல் அட்டவணையில் $x$ என்னும் மூலகத்தைத் தலைப்பில் கொண்ட கிடை வரிசையிலும், நிலை வரிசையிலும் மூலகங்களின் வரிசைக் கிரமம் (order) ஒன்றுகவே இருக்கும்.

(ii) விகிதமுறு எண்கள், மெய் எண்கள், மெய்யிலா எண்கள் ஆகியவற்றுள் ஏதேனும் ஒன்றினுல் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் $n \times n$ சிறப்பிலா அணிகள் (non-singular matrics), அணிகளுக்கான பெருக்கலின் (matrix multiplication) கீழ் ஒரு குழுவாகும். இக் குழுவிற்கு $n \times n$ எண்மான அணிகள் (scalar matrices) மையமாக இருக்கும்.

**7·8. தேற்றம்:** ஒரு குழுவின் மையமானது அதன் நேர்மை உட்குழுவாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** C என்பது (G , .) என்ற குழுவின் மையம் என்க. (C , .) ஒரு குழு என்பது தெரிந்ததே. இப்பொழுது $gC = Cg \ \forall\ g \in G$ என்று பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$gC$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் $g \cdot c$; $c \in C$ என்னும் வடிவில் இருக்கும். ஆனால் $g \cdot c = c \cdot g$ ($c \in C$ என்பதால்)

இங்கு $c \cdot g \in C_g$ ; $\therefore g \cdot c \in C_g$ இவ்வாறு $g \cdot c \in gC \Longrightarrow$ $g \cdot c \in Cg$. $\therefore gC \subseteq Cg$, இதுபோல் $Cg \subseteq gC$ என்று நிரூபிக்கலாம். எனவே $gC = Cg$.

எனவே $(C , .) \lhd (G , .)$.

**7·9. வரையறை:** (G , .) ஒரு குழு என்க. H என்பது G-ன் உட்கணம் என்க.

$a, b$ ஆகியவை G-ன் இரு மூலகங்களாக இருக்கும்போது $_a H_b$ என்ற கணத்தை $_a H_b = \left\{ a \cdot h . b \,/\, h \in H \right\}$ என்று வரையறுக்கிறோம்.

**7·10. தேற்றம்:** (N , .) என்பது (G , .)-ன் உட்குழு என்க. இப்பொழுது பின்வரும் மூன்று கூற்றுகளும் (statements) ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

(i) $gN = Ng \quad \forall\ g \in G$.

(ii) $g^{-1}Ng = N \quad \forall\ g \in G$.

(iii) $g^{-1}Ng \subseteq N \quad \forall\ g \in G$.

**நிரூபணம்:** பாகம் 1. (i) $\Longrightarrow$ (ii) என்று நிரூபிக்க:

$gN = Ng \ \forall\ g \in G$. (கொடுத்திருப்பது)

$g^{-1}Ng = N$ என்று நிரூபிக்க.

$g^{-1}n, g$ என்பது $g^{-1}Ng$-லுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $Ng = gN$ என்பதால் $ng_1 = gn_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

$\therefore g^{-1}(n_1 g) = g^{-1} . (gn_2) = (g^{-1} . g) n_2 = n_2 \in N.$

அதாவது $g^{-1}n_1 g \in N$. எனவே $g^{-1}Ng \subseteq N$ (1)

$n_3$ என்பது N-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $gN = Ng$ என்பதால் $g n_3 = n_4 g$ என்னும்படியாக $n_4 \in N$

$\therefore g^{-1} . (g n_3) = g^{-1} . (n_4 g)$

அதாவது $(g^{-1} . g) \; n_3 = g^{-1}n_4 g \in g^{-1}Ng$

அதாவது $n_3 \in g^{-1}Ng$.

இவ்வாறு $n_3 \in N \Longrightarrow n_3 \in g^{-1} Ng$ ;

எனவே $N \subseteq g^{-1}Ng$ (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிருந்து $g^{-1}Ng = N \; \forall \; g \in G$.

இவ்வாறு (i) $\Longrightarrow$ (ii).

**பாகம் 2.** (ii) $\Longrightarrow$ (iii) என்று நிரூபிக்க.

$g^{-1}Ng = N \quad \forall \; g \in G$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$\therefore g^{-1}Ng \subseteq N \quad \forall \; g \in G$.

இவ்வாறு (ii) $\Longrightarrow$ (iii)

**பாகம் 3.** (iii) $\Longrightarrow$ (i) என்று நிரூபிக்க.

$g^{-1}Ng \subseteq N \;\; \forall \; g \in G$ (*கொடுத்திருப்பது*)

$Ng = gN \quad \forall \; g \in G$ (*காட்ட வேண்டியது*)

$n_1 g$ என்பது $Ng$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$g^{-1}Ng \subseteq N$ என்பதால் $g^{-1} n_1 g = n_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

இப்பொழுது $g . (g^{-1} n_1 g) = g . n_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

அதாவது $(g . g^{-1}) . (n . g) = g n_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

அதாவது $n_1 g = g n_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

இவ்வாறு $N_1 g \in Ng \Longrightarrow n_1 g = gn_2 \in gn$.

$\therefore Ng \subseteq gN$ ... ... ... ... (3)

முன்போலவே $g n_3$ என்பது $g N$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இங்கு $g^{-1} Ng \subseteq N \quad \forall g \in G$

இதில் $g$-க்குப் பதில் $g^{-1}$ போடும்போது $\left(g^{-1}\right)^{-1} Ng^{-1} \subseteq N$.

அதாவது $g Ng^{-1} \subseteq N$. $\therefore gn_3 g^{-1} \in N$.

$\therefore gn_3 g^{-1} = n_4$ என்னும்படியாக $n_4 \in N$.

அதாவ்து $g n_3 = n_4 a$ என்னும்படியாக $n_4 \in N$.

இங்கு $n_4 g \in Na$ என்பதால் $gn_3 \in Ng$.

இவ்வாறு $g n_3 \in g N \Longrightarrow g n_3 \in N$; $\therefore gN \subseteq Ng$ (4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $Ng = g N \quad \forall g \in G$.

அதாவது (iii) $\Longrightarrow$ (i)

இப்பொழுது பாகங்கள் 1,2,3 ஆகியவற்றிலிருந்து (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i). ஆகவே (i) (ii) (iii) ஆகிய மூன்றும் ஒன்றுக் கொன்று சமமானவை (equivalent) என்பது விளங்கும்.

குறிப்பு: ஓர் உட்குழுவானது நேர்மை உட்குழு என்று காட்டு வதற்கு இவை மூன்றில் ஏதேனும் ஒன்றுக்கு அது கட்டுப்பட்டிருக்

கிறது என்று காட்டினால் போதும். (iii) ஆவது நிபந்தனை பல இடங்களில் இலகுவாய் இருப்பதுண்டு.

**7·11. வரையறை :** ஒரு குழுவின் உட்கணத்தைத் திரட்சி (complex) என்கிறோம். குறிப்பாக உட்குழுக்களின் உப கணங்கள் திரட்சிகள் ஆகும்.

**திரட்சிகளின் பெருக்கல் (Multiplication of Complexes)**

**7·12. வரையறை :** $(G, .)$ என்பது ஒரு குழு என்றும், A, B ஆகியவை G-ன் உட்கணங்கள் என்றும் எடுத்துக் கொள்க. AB என்ற திரட்சியை $AB = \left\{ a \cdot b \;\middle/\; \begin{matrix} a \in A \\ b \in B \end{matrix} \right\}$ என்று வரையறுக்கிறோம். இது திரட்சிகளுக்கான பெருக்கல் எனப்படும்.

**7·13. குணம் :** $(A, .)$ ; $(B, .)$ ஆகியவை உட்குழுக்களாக இருந்தால் $(AB, .)$ என்பது உட்குழுவாகவோ அல்லது உட்குழு அல்லாமலோ இருக்கலாம். இதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் விளக்கும்.

எ. கா. (i) : எடுத்துக்காட்டு 7·3-ல் எடுத்துக்கொண்ட $D_8$ என்ற குழுவில் $\{1, h\}$, $\{1, y\}$ ஆகியவை உட் குழுக்கள். அத்துடன் $\{1, h\}\{1, y\} = \{1, y, h, a^2\}$ என்பதுவும் உட்குழுவாகும்.

எ. கா. (ii) : எடுத்துக்காட்டு 7·3-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் $D_8$ என்ற குழுவில் $\{1, x\}$, $\{1, h\}$ ஆகிய இரண்டும் உட்குழுக்கள் ஆனால் $\{1, x\}\{1, h\} = \{1, x, h, a^3\}$ என்பது உட்குழு அல்ல.

**7·14. தேற்றம் :** A என்பது உட்குழு என்றால் $AA = A$. (இதை நிரூபிக்க.)

**7·15. தேற்றம் :** $(G, .)$ என்னும் குழுவில் $(A, .)$ என்பது உட்குழுவாகவும், $(N, .)$ என்பது நேர்மை உட்குழுவாகவும் (Normal sub-group) இருந்தால் $(AN, .)$ ஓர் உட்குழுவாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : AN-ன் மூலகங்கள் $a.n : a \in A,\ n \in N$ என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். $a_1 n_1, a_2 n_2$ ஆகியவை AN-ல் உள்ள இரு மூலகங்கள் என்க.

இப்பொழுது $(a_1 n_1) . (a_2 n_2) = a_1 (n_1 a_2) n_2 \ldots\ldots (1)$

(சேர்ப்பு விதி)

இங்கு $N \lhd G$ என்பதால் $n_1 a_2 = a_2 n_3$ என்னும்படியாக $n_3 \in N$.

∴ (1)-லிருந்து $(a_1 n_1) \cdot (a_2 n_2) = a_1 (a_2 n_3) n_2 = (a_1 a_2) \cdot (n_3 n_2)$

ஆனால் A, N ஆகியவை குழுக்களாதலால் $a_1 a_2 \in A$ & $n_3 n_2 \in N$.

எனவே $(a_1 a_2) \cdot (n_3 n_2) \in AN \Longrightarrow (a_1 n_1) \cdot (a_2 n_2) \in AN$

அதாவது AN என்னும் கணம் '.' என்ற செயலியின் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. ... ... ... (2)

$AN \subseteq G$; $(G, \cdot)$ ஒரு குழு. எனவே AN-ன் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... (3)

$e$ என்பது $(G, \cdot)$-ன் அலகு என்றால், $e \in A$ & $e \in N$

∴ $e \cdot e = e \in AN$ ... ... ... (4)

$a \cdot n$ என்பது AN-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $(a \cdot n)^{-1} = n^{-1} \cdot a^{-1}$ (குழுக்களின் குணத்தின் படி) ... ... ... ... (5)

ஆனால் $N \lhd G$ என்பதால் $n^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot n_2$ என்னும்படியாக $n_2 \in N$.

இங்கு $a^{-1} \in A$ & $n_2 \in N$. [$(A, \cdot)$ உட்குழுவாகையால்]

எனவே $a^{-1} \cdot n_2 \in AN$.

எனவே (5)-லிருந்து $(a \cdot n)^{-1} = n^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot n_2 \in AN$

அதாவது AN-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை மூலகம் AN-ல் உள்ளது. ... ... ... (6)

(2), (3), (4), (6) ஆகியவற்றிலிருந்து $(AN, \cdot)$ ஓர் உட்குழுவாகும்.

**7·16. தேற்றம் :** $(G, .)$ என்னும் குழுவில் $(A, .)$ என்பது உட்குழுவாகவும், $(N, .)$ என்பது நேர்மை உட்குழுவாகவும் இருந்தால் $(NA, .)$ என்பது ஓர் உட்குழுவாகும்.

[இதைத் தேற்றம் 7.15 ஐப் போல் நிரூபிக்கலாம்].

தேற்றங்கள் 7·15, 7·16 ஆகிய இரண்டையும் பின் வரும் தேற்றத்திற்குள் அடக்கிவிடலாம்.

**7·17. தேற்றம் :** $(G, .)$ என்ற குழுவுக்கு $(H, .)$, $(K, .)$ ஆகியவை உட்குழுக்கள் என்க. $(HK, .)$ என்பது உட்குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை $HK = KH$ என்பதாகும்.

நிரூபணம் : பாகம் I. $HK = KH$ என்க.

HK ஒரு குழு என்று நிரூபிக்க.

HK-ன் மூலகங்கள் $hk : h \in H, k \in K$ என்னும் வடிவில் இருக்கும். $h_1k_1$, $h_2k_2$ என்பவை HK-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க.

$$(h_1k_1) . (h_2k_2) = h_1 (k_1 . h_2) k_2 \qquad \text{(சேர்ப்பு விதி)}$$

இங்கு $k_1h_2 \in KH$. $KH = HK$ என்பதால் $k_1h_2 = h_3k_3$ என்னும்படியாக $h_3 \in H, k_3 \in K$.

$$\text{எனவே } (h_1k_1) . (h_2k_2) = h_1 . (h_3k_3) k_2$$
$$= (h_1h_3) . (k_3k_2) \text{ (சேர்ப்பு விதிப்படி)}$$

இங்கு $h_1h_3 \in H$, $k_3k_2 \in K$ என்பதால் $(h_1h_3) . (k_3k_2) \in HK$.

எனவே $(h_1k_1) . (h_2k_2) \in HK$

அதாவது HK என்ற கணம் '.' என்னும் செயலியின் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. ... ... ... (1)

$HK \subseteq G$ என்பதாலும் $(G, .)$ ஒரு குழு என்பதாலும் HK-ன் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதி (Associative law)-க்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... ... ... ... (2)

$e$ என்பது $(G, .)$-ன் அலகு என்றால், H, K ஆகியவை உட்குழுக்களாகையால் $e \in H$, $e \in K$. எனவே $e . e = e \in HK$...(3)

$hk$ என்பது HK-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$h \in H \Longrightarrow h^{-1} \in H$ [ (H , . ) ஓர் உட்குழு]

$k \in K \Longrightarrow k^{-1} \in K$ [ (K , . ) ஓர் உட்குழு]

$\therefore$ $k^{-1}h^{-1} \in KH$

$\therefore$ HK = KH என்பதால் $k^{-1}h^{-1} \in HK$.

அதாவது $(hk)^{-1} \in HK$ [ $\because (hk)^{-1} = k^{-1}h^{-1}$]

அதாவது HK-லுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் எதிர்மறையும் HK-ல் உள்ளது. ... ... ... ... (4)

(1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து (HK , . ) ஓர் உட்குழுவாகும்.

பாகம் I : (HK , . ) ஓர் உட்குழு என்க; HK = KH என்று நிரூபிக்க.

$kh$ என்பது KH-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$k \in K \Longrightarrow k^{-1} \in K$ [ (K , .) ஓர் உட்குழு]

$h \in K \Longrightarrow h^{-1} \in H$ [ (H , . ) ஓர் உட்குழு]

$\therefore$ $h^{-1} k^{-1} \in HK$ ; $\therefore$ $\left(h^{-1}k^{-1}\right)^{-1} \in HK$

[ (HK , . ) ஓர் உட்குழு]

அதாவது $\left(k^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(h^{-1}\right)^{-1} \in HK$

அதாவது $kh \in HK$

இவ்வாறு $kh \in KH \Longrightarrow kh \in HK$

$\therefore$ $KH \subseteq HK$ ... ... ... (5)

இனி $x$ என்பது HK-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. (HK , . ) ஓர் உட்குழுவாகையால் $x^{-1} \in HK$

$x^{-1} = hk$ என்க. ($hk$ என்ற வடிவில்தான் HK-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் இருக்கும்.)

இப்பொழுது $x = \left(x^{-1}\right)^{-1} \left( hk \right)^{-1} = k^{-1} h^{-1}$ ... (6)

$$\left.\begin{array}{l} h \in H \Longrightarrow h^{-1} \in H \\ k \in K \Longrightarrow k^{-1} \in K \end{array}\right\}$$ (H, K ஆகியவை உட்குழுக்கள்).

$\therefore$ $k^{-1} . h^{-1} \in KH$ ; எனவே (6)-லிருந்து $x \in KH$.

இவ்வாறு $x \in HK \Longrightarrow x \in KH$. எனவே $HK \subseteq KH$ ...(7)
(5), (7) ஆகியவற்றிலிருந்து $HK = KH$.

பாகங்கள் I, II ஆகியவற்றிலிருந்து $(HK, .)$ ஓர் உட்குழு $\Longleftrightarrow HK = KH$.

நேர்மை உட்குழுக்களின் உபகணங்கள் திரட்சிகளுக்கான பெருக்கலின் கீழ் பல முக்கியமான குணங்களைக் கொண்டுள்ளன. எனவே சாதாரண உட்குழுக்களின் உப கணங்களைப்பற்றிப் படிப்ப தால் கிடைக்கும் செய்திகளை விட, நேர்மை உட்குழுக்களின் உப கணங்களைப் பற்றிப் படிக்கும்போது அதிகச் செய்திகள் கிடைக்கும். எ.கா. 7.3-ல் நாம் பரிசீலனைக்கு எடுத்துக்கொண்ட $D_8$-ல் $X = \{1, a^2\}$ என்பது நேர்மை உட்குழு என்று பார்த்தோம். இதில்,

$$X_a = \{a, a^3\}, X_h = \{h, y\}$$

$$(X_a)(X_h) = \{a, a^3\}\{h, y\} = \{ah, ay, a^3h, a^3y\}$$

$$= \{z, x, x, z\} = \{x, z\}$$

ஆனால் $\{x, z\} = X_z = X_x$ .

இதில் $ah = z$ ; எனவே $X_a \ X_h = X_{ah}$ எனலாம். ... (P)

இது உபகணங்களுக்கிடையில் உள்ள நயமான குணமாகத் தோன்று கிறது. இதே போன்ற சமன்பாடு சாதாரண உட்குழுக்களின் உப கணங்களுக்குப் பொருந்தாது. உதாரணமாக மேற்கூறிய எ. கா. 7·3-ல்,

$$A_x A_y = \{x, a\}\ \{y, a^2\} = \{a, z, x, a^3\}$$

அதாவது $A_x A_y$ என்பது ஒரு உபகணமே அல்ல!!

அதாவது சாதாரண உட்குழுக்களைப் பொறுத்தவரையில் இரண்டு உபகணங்களின் பெருக்குத் திரட்சி உப கணமாகக்கூட இருக்கவேண்டியதில்லை. ஆனால் (P) என்ற குணம் நேர்மை உட்குழுவின் எல்லா உபகணங்களுக்கும் இருக்கும். இதைப் பின் வருமாறு தேற்றமாக நிரூபிப்போம்.

**7·18 தேற்றம்:** $(N, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழு (Normal sub-group) என்க.

இப்பொழுது $N_a N_b = N_{ab} \quad \forall\ a, b \in G$.

**நிரூபணம் :** $a, b$ என்பன G-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூல கங்கள் என்க. $N_a$ -ன் மூலகங்கள் $n.a$ என்ற வடிவிலும், $N_b$ -ன் மூலகங்கள் $n.b$ என்ற வடிவிலும் இருப்பதால் $N_a N_b$ -ன் மூலகங்கள் $n_1 a).(n_2 b)$ என்னும் வடிவில் இருக்கும்.

இப்பொழுது $(n_1 a).(n_2 b)$ என்பது $N_a N_b$ -ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $(n_1 a).(n_2 b) = n_1.(a.n_2).b$ ... (1) (சேர்ப்பு விதிப்படி)

N என்பது நேர்மை உட்குழுவாகையால் $a.n_2 = n_3.a$ என்னும்படியாக $n_3 \in$ N. (2)

$\therefore$ (1)-லிருந்து $(n_1 a)(n_2 b) = n_1.(n_3.a).b = (n_1 n_3).ab$...(2)

இதில் $n_1 n_3 \in N$ & $ab \in G$. $\therefore (n_1 n_3).ab \in N_{ab}$

$\therefore$ (2) லிருந்து $(n_1 a).(n_2 b) \in N_{ab}$

$\therefore N_a N_b \subseteq N_{ab}$ ... ... ... I

$N_{ab}$ -ன் மூலகங்கள் $n.a.b$ என்னும் வடிவில் இருக்கும்.

$n.a.b = (n.a) b = (n.a).(e.b)$

[e என்பது (G, .)-ன் அலகு]

இப்பொழுது $na \in N_a$ & $eb \in N_b$ ($e \in N$ என்பதால்)

$\therefore (na).(eb) \in N_a N_b$; எனவே $n.a.b \in N_a N_b$

அதாவது $n.a.b \in N_{ab} \Longrightarrow n.a.b \in N_a N_b$

எனவே $N_{ab} \subseteq N_a N_b$ ... ... ... II

I, II ஆகியவற்றிலிருந்து $N_a N_b = N_{ab} \quad \forall a, b, \in G$.

**7·19. தேற்றம் :** (N, .) என்பது (G, .) என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழு என்றால் $_aN\, _bN = {}_{ab}N \quad \forall a, b \in G$.

[தேற்றம் 7·18ஐப்போல் நிரூபிக்கவும்.]

**7·20. தேற்றம் :** (N, .) என்பது (G, .) என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழு என்க. இப்பொழுது N-ன் வலது உபகணங்கள் திரட்சிகளுக்கான பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குழுவாக இருக்கும்.

**நிரூபணம் :** முந்தைய தேற்றப்படி $N_a N_b = N_{ab}$ ... (1) அதாவது திரட்சிகளுக்கான பெருக்கலின் கீழ், வலது உபகணங் களைக்கொண்ட கணமானது அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

$$(N_a N_b)N_c = (N_{ab})N_c \quad [(1)\text{-ன்படி}]$$
$$= N_{(ab)c} \quad [(1)\text{-ன்படி}]$$
$$= N_{a(bc)} \quad [\text{G-ல் சேர்ப்பு விதி உண்மையாக இருக்கும்.}]$$
$$= N_a N_{bc} \quad [(1)\text{-ன்படி}]$$
$$= N_a (N_b N_c) \quad [(1)\text{-ன்படி}]$$

அதாவது திரட்சிகளுக்கான பெருக்கலின் கீழ் வலது உபகணங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டுள்ளன. ... ... ... (2)

$e$ என்பது (G, .)-ன் அலகு என்றால்,

$N_a N_e = N_{ae} = N_a \quad \forall\ a \in G$

$N_e N_a = N_{ea} = N_a \quad \forall\ a \in G.$

எனவே $N_e$ என்ற அலகு வலது உபகணங்களைக் கொண்ட கணத்தில் இருக்கின்றது. ... ... ... ... (3)

மேலும் $N_a$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வலது உபகணம் என்றால் $N_{a^{-1}}$ என்பதுவும் ஒரு வலது உபகணம். இப்பொழுது $N_a N_{a^{-1}} = N_{aa^{-1}} = N_e$;

$N_{a^{-1}} N_a = N_{a^{-1}a} = N_e$; அதாவது ஒவ்வொரு வலது உபகணத்திற்கும் ஒரு வலது உபகணம் எதிர்மறையாக உள்ளது ... (4)

(1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து வலது உபகணங்கள், திரட்சிகளுக்கான பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குழுவை உருவாக்குகின்றன என்பது தெளிவு.

இவ்வாறு உபகணங்களினால் வரும் குழுவை G-ல் N ஆல் வரும் ஈவுக்குழு (Quotient group of G by N) என்பது வழக்கம். இதை $\frac{G}{N}$ என்று குறிப்பிடலாம். மேலும் $e \in N$ என்பதால் $N_e = N$.

எனவே "$\frac{G}{N}$ என்ற குழுவில், N அலகாக (identity) உள்ளது" எனலாம்.

பயிற்சி

1. ஒரு குழுவுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட நேர்மை உட்குழுக்கள் இருக்கலாம் என்பதற்கு ஓர் உதாரணம் கொடுக்கவும்.

2. (G, .) என்ற குழுவில் (N, .) என்பது நேர்மை உட்குழு என்றும், $A \subseteq G$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் AN = NA என்று நிரூபிக்க.

3. எடுத்துக்காட்டு 7·3-ல் உள்ள $D_8$ உதாரணத்தைப் பார்க்கும்போது X என்பது இரண்டு மூலகங்களைக் கொண்ட நேர்மை உட்குழுவாக உள்ளது. இதே உட்குழு $D_8$-ன் மையமாக வும் உள்ளது. நாம் உபகணங்களை (cosets) எழுதும்பொழுது கடைப்பிடித்த முறையை நோக்குங்கால், "இரண்டு மூலகங்களைக் கொண்ட ஓர் உட்கணம் நேர்மை உட்குழுவாக இருக்குமாயின் அக்கணம் மையத்தின் உட்கணமாக இருக்கலாம்" என்று தோன்றுகிறது. இதை மேலும் அழகுபடுத்தி, "இரண்டு மூலகங் களைக் கொண்ட ஒவ்வொரு நேர்மை உட்குழுவும் மையத்தின் (centre) உட்குழுவாக இருக்கும்" எனலாம். இதை முறையாக நிரூபிக்க.

4. (C , .) என்பது (G , . )-ன் மையம் (centre) என்க. (H , . ) என்பது (G , . )-ன் உட்குழு என்க. (H , . ) என்பது (G , . )-ன் நேர்மை உட்குழு என்று நிரூபிக்க.

5. " (G , . ) என்பது ஏதேனும் ஒரு குழு என்க. (A , . ) $\triangleleft$ (G , . ) என்க. (A , . )-ன் உட்குழுக்கள் ஒவ்வொன்றும் (G , . )-ன் நேர்மை உட்குழுக்கள்". மேலே கொடுத்திருப்பது சரியானது என்றால் நிரூபிக்க. தவறு என்றால் ஓர் உதாரணம் தருக.

{ எ.கா. 7·3-ல் உள்ள $\{1, a^2\}$, $\{1, a, a^2, a^3\}$, $\{1, a^2, h, y\}$, $\{1, h\}$ ஆகிய உட்குழுக்களைப் பரிசீலனைக்கு எடுக்கவும். தேற்றம் 7·5 ஐயும் உபயோகிக்கலாம்.

6. (A , . ), (B , . ) ஆகியவை (G , . )-ன் நேர்மை உட் குழுக்கள் என்க. (A ∩ B , .) என்பதுவும் (G , . )-ன் நேர்மை உட்குழு என்று நிரூபிக்க. [ (A ∩ B , . )-ன் உப கணங்கள் பற்றிய முன்னைய கணக்கு ஒன்றை மனதில் கொள்க.]

7. $<m>$ என்பது (Z, + )-ன் நேர்மை உட்குழு என்று காட்டுக.

8. Q என்பது விகிதமுறு எண்களின் கணம் என்க. (Q-{0},.) என்ற குழுவுக்கு $\left(\left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in Q \\ x > 0 \end{array} \right\}, \ .\right)$ என்பது (அதாவது + ve rational களின் குழு) நேர்மை உட்குழு என்று நிரூபிக்க.

9. தேற்றங்கள் 7·15, 7·16 ஆகியவற்றைத் தேற்றம் 7·17-ன் கிளைத் தேற்றங்களாக நிரூபிக்க. (பயிற்சி 2 உபயோகப்படலாம்.)

10. தேற்றம் 7·20 ஐப் போன்ற தேற்றத்தை இடது உப கணங்களுக்கு எழுதி நிரூபிக்கவும்.

11. $(G, .)$ என்பது ஒரு குழு என்க. இதன் ஒவ்வொரு முறையான நேர்மை உட்குழுவும் (proper normal sub-group) பரிமாற்றுக் குழுவாக இருக்கவேண்டுமா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க. முன்போலவே ''பரிமாற்றுக் குழுவாக இருக்கும்'' என்றால், நிரூபணமும் இருக்கவேண்டியதில்லை என்றால் உதாரணமும் கொடுக்கவும். (பரிமாற்றுக் குழு அல்லாத குழுக்களை எடுத்து, அதில் வகுபடாப் பரிமாணத்தைத் தவிர வேறு பரிமாணத்தை உடைய உட்குழுக்களைப் பரிசீலனைக்கு எடுப்பது நல்லது.)

12. $(Z, +)$ என்ற குழுவிற்கு $(4Z, +)$ என்பது நேர்மை உட்குழுவாக இருக்கும். இக் குழுவின் வலது உபகணங்களினால் நிர்ணயிக்கப்படும் குழுவைக் கண்டுபிடித்து அதன் பெருக்கல் அட்டவணையைத் தயாரிக்க. இது $C_4$ உடன் அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்கிறது என்று காட்டுக. $\left(\text{அதாவது } \dfrac{(Z, +)}{(4Z, +)} \cong C_4\right)$.

13. மேலே கொடுத்திருக்கும் பயிற்சி (12)-லிருந்து பின்வரும் குழுக்களுடன் அமைப்பில் ஒன்றுன குழுக்களை காண்க.

$$\text{(i) } \frac{(Z, +)}{(7Z, +)}, \text{ (ii) } \frac{(Z, +)}{(mZ, +)}, \text{ (iii) } \frac{(Q - \{0\}, .)}{(\{1, -1\}, .)}$$

14 $(H, .), (K, .)$ என்பவை $(G, .)$ என்ற பரிமாற்றுக் குழுவின் உட்குழுக்கள் என்றால் $(HK, .)$ என்பதுவும் $(G, .)$-ன் உட்குழு என்று நிரூபிக்க.

15. (தேற்றம் 7.4-ன் மறுதலைப் பற்றி) ஒரு குழுவின் உட்குழுக்கள் ஒவ்வொன்றும் நேர்மை உட்குழுக்களாக இருந்தால் அக்குழு பரிமாற்றுக் குழுவாக இருக்க வேண்டுமா என்பதை ஆய்க. (நிரூபணம் அல்லது எதிர் உதாரணம் தருக.)

# 8. புனல் சார்புகள்

## (Homomorphisms)

**குழுக்களுக்கான புனல் சார்புகள் :**

ஒரு குழுவிலிருந்து இன்னொரு குழுவிற்கான ஓரினச் சார்பை (Isomorphism) "ஒன்றுக்கொன்றுன செயலைப் பாதுகாக்கும் சார்பு" என்று வரையறுத்தோம். இப்பொழுது புனல் சார்பைப் பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

8·1. வரையறை : $(A, .)$ என்ற குழுவிலிருந்து $(B, *)$ என்ற குழுவிற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் $f$ என்ற சார்பு, A-ல் உள்ள $x, y$ என்ற எந்த இரு மூலகங்களுக்கும், $f(x . y) = f(x) * f(y)$ என்னும் விதிக்குட்பட்டிருந்தால் அதைப் புனல் சார்பு (Homomorphism) என்கிறோம். $f(A)$ என்ற B-ன் உட்கணம் $(A, .)$-ன் புனல் சார்புப் பிம்பம் (Homomorphic image) எனப்படும்.

சுருங்கக் கூறின் ஒரு குழுவிலிருந்து இன்னொரு குழுவிற்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் செயலைப் பாதுகாக்கும் சார்பு புனல் சார்பு எனப்படும்.

குறிப்பு : ஒவ்வோர் ஓரினச் சார்பும் புனல் சார்பாகும். எனவே நாம் கீழே புனல் சார்பைப் பற்றிப் படிப்பவை அனைத்தும் ஓரினச் சார்புகளுக்கும் பொருந்தும். ஆனால் சில இடங்களில் ஓரினச் சார்புக்கு மாற்றும்போது குணம் வெளிப்படையானதாக (obvious, trivial) மாறலாம்.

8·2. எ. கா. : $(N, .)$ என்பது $(G, .)$ என்ற குழுவின் நேர்மை உட்குழு என்க. இப்பொழுது $f : G \longrightarrow \frac{G}{N}$ என்னும் சார்பை $f(x) = N_x$ என்று வரையறுத்தால் $f$ புனல் சார்பாக இருக்கும்.

இங்கு $f(x) = N_x$, $f(y) = N_y$ என்றால்

$f(x) * f(y) = N_x * N_y$ (* என்பது திரட்டுகளுக்கான பெருக்கலைக் குறிக்கிறது என்றால்)

$= N_{x \cdot y}$ (தேற்றம் 7·18)

$= f(x . y)$

அதாவது $f(x . y) = f(x) * f(y)$. எனவே $f$ புனல் சார்பாகும்.

**8·3.** $a$ என்பது $(G , .)$ என்ற குழுவின் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $(Z, +)$-லிருந்து $(G , .)$-க்குப் பின் வரும் புனல் சார்பை வரையறுக்கலாம்.

$$f : Z \longrightarrow G ; \quad f(p) = a^p.$$

இப்பொழுது $f(p) = a^p, \quad f(q) = a^q$

$$f(p) . f(q) = a^p . a^q = a^{p+q} = f(p+q)$$

இவ்வாறு $f(p+q) = f(p) . f(q)$

எனவே $f$ புனல் சார்பாகும்.

**8·4.** **எ. கா.:** சிக்கல் எண்கள் ஒவ்வொன்றிற்கும் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ என்னும் வடிவம் உண்டு. மேலும் $r(\cos\theta + i\sin\theta)$. $r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = rr_1[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$. இப்பொழுது $r = 1$ என்னும்படியாக உள்ள சிக்கல் எண்களை எடுத்துக்கொண்டால் அவை இவ்வகைப் பெருக்கலின் கீழ் ஒரு குழுவாக இருக்கும். இக் குழுவை $(A , .)$ என்று குறிப்பிடுக.

இப்பொழுது $(R, +)$ என்னும் மெய் எண்களின் குழுவிலிருந்து $(A , .)$-க்கு ஒரு புனல் சார்பை $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ என்று வரையறுக்கலாம். $f$-ன் கீழ் R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் தனித்த பிம்பம் A-ல் உள்ளது. எனவே $f$ சார்பாகிறது. மேலும்,

$$\begin{aligned} f(\theta_1) . f(\theta_2) &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) . (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= f(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

அதாவது $f(\theta_1 + \theta_2) = f(\theta_1) . f(\theta_2)$;

எனவே $f$ புனல் சார்பாகிறது.

மேலே கொடுத்திருக்கும் எடுத்துக்காட்டுகளிலிருந்து புனல் சார்பைப் பற்றிய பின்வரும் உண்மைகள் தெளிவாகும்.

(i) புனல் சார்பு என்பது ஒன்றுக்கொன்றான சார்பாக இருக்கவேண்டியதில்லை; ஒன்றுக்கொன்றாக இருந்தால் ஓரினச் சார்பாகும்.

(ii) புனல் சார்பு, முழுச் சார்பாக இருக்கவேண்டும் என்ற கட்டாயம் இல்லை.

(iii) ஒரு சார்பு, "புனல் சார்பு" ஆவதற்கு அது செயலைப் பாதுகாத்தால் மட்டும் போதும்.

8·5. தேற்றம் : $f:(A\,,\,.) \longrightarrow (B, *)$ ஒரு புனல் சார்பு என்க. இப்பொழுது $(f(A), *)$ என்பது $(B, *)$-ன் உட்குழுவாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : $f$ என்பது புனல் சார்பாகையால் $f(x\,.\,y) = f(x) * f(y)$. ... ... ... (1)

$f(A)$-ன் மூலகங்கள் அனைத்தும் $f(x) : x \in A$ என்னும் வடிவில் இருக்கும். எனவே (1)-லிருந்து $f(A)$ என்ற கணம் $*$-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது என்பது விளங்கும். ... ... (2)

$f(A) \subseteq B$. எனவே B-ன் மூலகங்களுக்கு உண்மையாக இருக்கும். சேர்ப்பு விதி[ $(B, *)$ குழுவாகையால் ] $f(A)$-ன் மூலகங்களுக்கும் உண்மையாகும். ... ... .. (3)

$e$ என்பது $(A\,,\,.)$-ன் அலகு என்க.

இப்பொழுது $f(e) \in f(A)$.

$f(x)$ என்பது $f(A)$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றால்

$$f(x) * f(e) = f(x\,.\,e) = f(x)$$
$$f(e) * f(x) = f(e\,.\,x) = f(x)$$

எனவே $f(e)$ என்பது $f(A)$-ல் அலகாக உள்ளது (4)

$f(a)$ என்பது $f(A)$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றால் $f(a^{-1})$ என்பதுவும் $f(A)$-ன் மூலகமாகும். இப்பொழுது

$$f(a) * f(a^{-1}) = f(a\,.\,a^{-1}) = f(e)$$
$$f(a^{-1}) * f(a) = f(a^{-1}\,.\,a) = f(e)$$

அதாவது $f(A)$-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் எதிர்மறை உள்ளது. ......... (5)

(2), (3), (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து $(f(A), *)$ ஒரு குழுவாகும்.

இத்தேற்றத்திலிருந்து "ஒரு குழுவின் புனல் சார்புப் பிம்பம் ஒரு குழுவாகும்" என்பது விளங்கும்.

8·6. தேற்றம் : $f:(A\,,\,.) \longrightarrow (B\,,\,*)$ ஒரு புனல் சார்பு என்க. $e'$ என்பது $(B, *)$-ன் அலகு என்க. இப்பொழுது $e'$-ன் மூல பிம்பங்கள் சேர்ந்து $(A\,,\,.)$-ன் ஒரு நேர்மை உட்குழுவை நிர்மாணிக்கும்.

நிரூபணம்: $K = \left\{ x \;\middle|\; \begin{matrix} x \in A \\ f(x) = e' \end{matrix} \right\}$ என்க.

$a, b$ என்பன K-ன் எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க.

இப்பொழுது $f(a) = e'$ & $f(b) = e'$ ... (1

ஆனால் $f(a) * f(b) = f(a \cdot b)$

$f(a)$, $(b)$ ஆகியவற்றிற்கு $(1)$-லிருந்து மதிப்புக் கொடுத்தால்

$$e' * e' = f(a \cdot b)$$

அதாவது $f(a \cdot b) = e'$. எனவே $a \cdot b \in K$.

இவ்வாறு $a, b \in K \Longrightarrow a \cdot b \in K$ ... ... (2)

$(A, \cdot)$ ஒரு குழுவாகவும், $K \subseteq A$ என்றும் இருப்பதால் K-ன் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... (3)

$e$ என்பது $(A, \cdot)$-ன் அலகு என்க. இப்பொழுது $f(a)$ என்பது $f(A)$-ன் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றால் $f(a) * f(e) = f(a \cdot e) = f(a)$ & $f(e) * f(a) = f(e \cdot a) = f(a)$. எனவே $f(e)$ என்பது $f(A)$-ன் அலகாக உள்ளது. ஒரு குழுவில், இரண்டு அலகுத் தன்மையுடைய மூலகங்கள் இருக்க முடியாதாகையால் $f(e) = e'$. அதாவது $e \in K$ ... ... ... (4)

$a \in K$ என்க. எனவே $f(a) = e'$.

இப்பொழுது $f(a^{-1}) * f(a) = f(a^{-1} \cdot a)$

அதாவது $a(f^{-1}) * e' = f(e)$ $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = e'.\ (\text{நிரூபித்தது}) \\ e' \text{ என்பது B-ல் அலகு} \end{array} \right\}$

அதாவது $f(a^{-1}) = e'$

எனவே $a^{-1} \in K$.

இவ்வாறு $a \in K \Longrightarrow a^{-1} \in K$ ... ... (5)

(2), (3), (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து $(K, \cdot)$ ஒரு குழு என்பது விளங்கும். ... ... ... ... (I)

இப்பொழுது $a^{-1}K_a \subseteq K \quad \forall a \in A$ என்று நிரூபிப்பதன் மூலம் $K \triangleleft A$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

$a^{-1}k_a$ என்பது $a^{-1}K_a$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

$f(a^{-1}ka) = f[(a^{-1}k)a]$ $((A, \cdot)$-ன் மூலகங்களுக்கான சேர்ப்பு விதி)

$= f(a^{-1}k) * f(a)$ ($f$, புனல் சார்பு)

$= [f(a^{-1}) * f(k)] * f(a)$ ($f$, புனல் சார்பு)

இங்கு $k \in K$ என்பதால் $f(k) = e'$.

$f(a^{-1}ka) = [f(a^{-1}) * e'] * f(a)$

$f(a^{-1}) * f(a)$ [$e'$ என்பது (B , *)-ன் அலகு]

$f(a^{-1} . a) = f(e) = e'$

எனவே $a^{-1} k a \in K$; எனவே $a^{-1}Ka \subseteq K$ (II)

I, II ஆகியவற்றிலிருந்து $(K, .) \triangleleft (A, .)$ என்று விளங்கும்.

**8·7.** வரையறை: $f : (A, .) \rightarrow (B, *)$ ஒரு புனல் சார்பு என்றும், $e'$ என்பது (B , *)-ன் அலகு என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $K = \left\{ x \,\middle/\, \begin{matrix} x \in A \\ f(x) = e' \end{matrix} \right\}$ என்று வரையறுத்தால் (K , .) என்பது (A , .)-ன் நேர்மை உட்குழுவாக இருக்கும். இக்குழு $f$ என்ற புனல் சார்பின் அலகுக் கற்றை (kernel) எனப்படும். இதை K என்ற எழுத்தினால் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

**8·8.** எ.கா.: எடுத்துக்காட்டு 8.3-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புனல் சார்பின் அலகுக் கற்றையைக் காண்போம்.

$f : (Z, +) \longrightarrow (G, .)$, $p \longrightarrow a^p$ என்பதே சார்பு.

வகை 1: $a$ என்பது (G , .)-ன் அலகு என்றால் Z-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் (G , .)-ன் அலகுக்கே செல்லும். எனவே (Z, +) என்ற முழுக் குழுவே அலகுக் கற்றை (kernel) ஆகும்.

வகை 2: (G , .) என்ற குழுவில் $a$-ன் பரிமாணம் '$m$' என்க.

இப்பொழுது $a^{m}$, $a^{2m}$, ...... $a^{0}$, $a^{-m}$, $a^{-2m}$, ...... போன்றவை மட்டுமே (G,.)-ன் அலகாகும். எனவே இங்கு அலகுக் கற்றை

$(m\mathbb{Z}, +)$ என்ற குழுவாகும். [$a^{-m} = a^{-1} . a^{-1}$ .........$m$ தடவைகள் என்பதை மனதில் கொள்க.]

வகை 3: (G , .) என்ற குழுவில் $a$-ன் பரிமாணம் $\infty$ என்றால் $m \neq 0, m \in z \Longrightarrow a^{m} \neq e$. ($e$ என்பது (G , .)-ன் அலகு.)

எனவே $a^{p} = e$ என்னும்படியாக $p = 0$ என்ற மூலகம் மட்டுமே உள்ளது. அதாவது இங்கு $(\{0\}, +)$ என்பதுவே அலகுக் கற்றையாகும்.

இங்கு $(Z, +)$, $(m\mathbb{Z}, +)$, $(\{0\}, +)$ ஆகிய அனைத்தும் குழுக்கள் என்பது தெரியும். மேலும் $(Z, +)$ அபீலியன் குழுவாகை யால் இவை அனைத்தும் நேர்மை உட்குழுக்களாகும்.

**8·9. புனல் சார்பின் அடிப்படைத் தேற்றம்** (Fundamental theorem on homomorphisms)

**முதல் ஓரினச் சார்புத் தேற்றம்** (First isomorphism theorem)

*G′ என்பது f என்ற புனல் சார்பில் G-ன் பிம்பமாகவும் K என்பது f-ன் அலகுக் கற்றை (kernel) ஆகவும் இருந்தால்* $G' \cong \dfrac{G}{K}$.

**நிருபணம் :** $f : G \longrightarrow G'$ என்பது முழுப் புனல் சார்பு (onto homomorphism)

[ G′ என்பது f-ன் பிம்பமாக இருப்பதால். ]

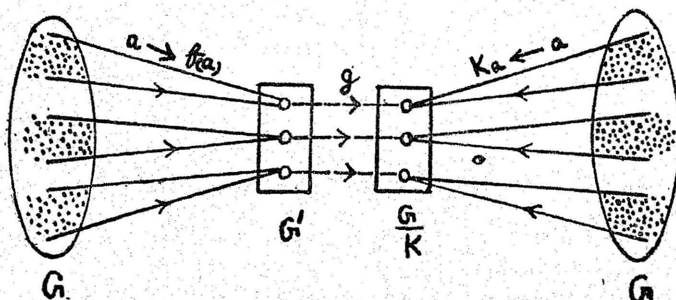
எனவே G′-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் $f(a)$, $a \in G$ என்னும் வடிவில் இருக்கும். ... ... ... (1)

K என்பது அலகுக் கற்றை என்பதால், $K \lhd G$. $\dfrac{G}{K}$-ன் மூலகங்கள் ஒவ்வொன்றும் $Ka : a \in G$ என்னும் வடிவில் இருக்கும் ...(2)

இப்பொழுது $g : G' \longrightarrow \dfrac{G}{K}$ என்னும் நியமனத்தை $g(f(a)) = Ka$, அதாவது $f(a) \longrightarrow Ka$ என்று வரையறை செய்க.

g ஒரு சார்பு என்று காட்ட :

அதாவது G′-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் ஒரே ஒரு பிம்பம்தான் உள்ளது என்று காட்ட :




படம் 22

G′-ல் உள்ள x என்ற ஏதேனும் ஒரு மூலகத்தைக் எடுத்துக் கொள்க. இப்பொழுது $f(a) = x$ என்னும்படியாக G-ல் a என்ற

ஒரு மூலகமாவது இருக்கும். $g$ ஐ நாம் வரையறுத்துள்ளபடி
$g(x) = g(f(a)) = K_a$ ... ... ... (3)

$f$ என்பது புனல் சார்பு ஆகையால் $f(b) = x$ என்னும்படியாக $b$ என்னும் வேறொரு மூலகம் G-ல் இருக்கலாம். இப்பொழுது $g$ ஐ நாம் வரையறுத்துள்ளபடி $g(x) = g(f(b)) = K_b$ ... (4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $x$-க்கு இரண்டு பிம்பங்கள் இருப்பது போல் தோன்றுகிறது. இந்த இரண்டும் (அதாவது $K_a$, $K_b$) ஒன்றுதான் என்று நிரூபிப்போம்.

$x = f(a) = f(b)$; இருபுறமும் $f(b^{-1})$ கொண்டு செயல் நடத்தினால்,

$$f(a) * f(b^{-1}) = f(b) * f(b^{-1})$$

($*$ என்பது G′-ல் உள்ள செயலி என்க.)

அதாவது $f(a \cdot b^{-1}) = f(b \cdot b^{-1})$ ($f$ புனல் சார்பு)
$= f(e)$ [$e$ என்பது (G , .)-ன் அலகு என்றால்]
$= e'$ [$e'$ என்பது (G′, $*$)-ன் அலகு என்றால்]

எனவே $a \cdot b^{-1} \in K$ (K என்பது $f$-ன் அலகுக் கற்றை)

$\therefore$ $a \in K_b$.

ஆனால் $a \in K_a$; எனவே $K_a \cap K_b \neq \phi$

எனவே $K_a = K_b$. (உபகணங்களின் குணத்தின்படி)

அதாவது G′-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $g$ என்ற நியமனத்தின் கீழ், தனித்த பிம்பம் உள்ளது. எனவே $g : G' \longrightarrow \frac{G}{K}$ ஒரு சார்பாகும். ... ... (5)

$g$, ஒன்றுக்கொன்றான சார்பு என்று காட்ட :

$f(a)$, $f(b)$ என்னும் G′-ன் இரு மூலகங்களுக்கு ஒரே பிம்பம் இருப்பதாகக் கொள்க. இப்பொழுது $f(a) \longrightarrow K_a$, $f(b) \longrightarrow K_b$.

எனவே நாம் எடுத்துக்கொண்டபடி $K_a = K_b$ ... ... (6)

$e \in K$ என்பதனால் $e \cdot a = a \in K_a$

எனவே (6)-லிருந்து $a \in K_b$; அதாவது $a = k_1 b$ என்னும்படியாக $k_1 \in K$ அதாவது $a \cdot b^{-1} = k_1 b \cdot b^{-1}$ என்னும்படியாக $k_1 \in K$.

$\therefore a \cdot b^{-1} = k_1 \in K$; அதாவது $a \cdot b^{-1} \in K$.

ஆனால் K என்பது $f$ என்ற புனல் சார்பின் அலகுக் கற்றை (kernel.)

$\therefore f(a \cdot b^{-1}) = e'$ ($e'$ என்பது $G'$-ன் அலகு)

அதாவது $f(a) * f(b^{-1}) = e'$ ($f$ ஒரு புனல் சார்பு.)

$f(b)$ கொண்டு வலப் புறத்தில் செயல் நிகழ்த்தினல்,

$[f(a) * f(b^{-1})] * f(b) = e' * f(b)$

அதாவது $f(a) * [f(b^{-1}) * f(b)] = f(b)$ (($G'$, $*$) ஒரு குழு)

அதாவது $f(a) * f(b^{-1} \cdot b) = f(b)$ ($f$, புனல் சார்பு)

அதாவது $f(a) * f(e) = f(b)$ ($e$ என்பது (G, .) ன் அலகு)

அதாவது $f(a \cdot e) = f(b)$ ($f$ புனல் சார்பு)

அதாவது $f(a) = f(b)$ ($e$ என்பது (G, .)-ன் அலகு)

அதாவது $G'$-ன் இரண்டு மூலகங்களின் பிம்பங்கள் ஒன்ருக இருக்கவேண்டும் என்ருல் அந்த இரு மூலகங்களும் ஒன்ருக இருக்க வேண்டும். எனவே $g$, ஒன்றுக்கொன்ருன சார்பாகும். ... (7)

g, முழுச் சார்பு என்று காட்ட :

$g : G' \to \frac{G}{K}$-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட சார்பு. $\frac{G}{K}$-ன் மூலகங்கள், $K_x : x \in G$ என்னும் வடிவில் இருக்கும். $K_y$ என்பது $\frac{K}{G}$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்ருல் $y \in G$. எனவே $f(y) \in G'$.

[$f$ என்பது G-லிருந்து $G'$-க்கான சார்பு.]

இப்பொழுது $g : G' \to \frac{G}{K}$-வரையறுக்கப்பட்டுள்ள விதத்தின்படி

$g(f(y)) = K_y$. அதாவது $K_y$ என்ற $\frac{G}{K}$-ன் ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $f(y)$ என்ற மூல பிம்பம் $G'$-ல் உள்ளது. எனவே g என்பது முழுச் சார்பாகும். ... ... ... (8)

g, செயலைப் பாதுகாக்கிறது என்று காட்ட :

அதாவது $a \to g(a)$, $b \to g(b)$ என்றால் $a \cdot b \to g(a)\, g(b)$ என்று காட்ட, அதாவது $g(a * b) = g(a)\; g(b)$ என்று காட்ட.

இங்கு $g(f(a) * f(b)) = g(f(a))\, g(f(b))$ என்று காட்ட.

{ g-ன் உபகணமான $\frac{G}{K}$-ன் மூலகங்கள் திரட்சிகள் ஆகை யால் நாம் g-ன் பிம்பங்களுக்கிடையில் செயலைக் குறிக் கும் குறியீடு (symbol) எதையும் போடுவதில்லை.

$g(f(a) * f(b)) = g(f(a \cdot b))$ ($f$ என்பது புனல் சார்பு)
$= K_{a\,b}$ ......(9) (g-ன் வரையறைப்படி.)

ஆனால் $K \lhd G$; அத்துடன் $a, b \in G$,

எனவே $K_a K_b = K_{a \cdot b}$

எனவே (8)-லிருந்து $g(f(a) * f(b)) = K_a K_b$

ஆனால் $K_a = g(f(a))$ & $K_b = g(f(b))$

எனவே $g(f(a) * f(b)) = g(f(a))\, g(f(b))$

அதாவது g செயலைப் பாதுகாக்கிறது. ... ... (10)

5, 7, 8, 10 ஆகியவற்றிலிருந்து $a$ என்பது முழு ஓரினச்சார்பு (onto isomorphism) என்பது விளங்கும். இவ்வாறு $G' \cong \frac{G}{K}$.

## பயிற்சி

1. தேற்றம் 8.6-ல் (K , .) என்பது (A , .)-ன் உட்குழு என்று நிரூபிக்கும் பாகத்தை தேற்றம் 8·5ஐ உபயோ கித்து நிரூபிக்கவும்.
2. எ.கா. 8·2, 8·4 ஆகியவற்றில் கொடுத்துள்ள புனல் சார்புகளின் அலகுக் கற்றை (kernel) யைக் காண்க. ($2\pi$ என்பதுவும் ஒரு மெய் எண் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.)
3. எ. கா. 8·4-ல் கொடுத்துள்ள புனல் சார்பில் K, $\frac{G}{K}$ ஆகியவற்றைக் காண்க. G′ என்பது $\frac{G}{K}$ உடன் அமைப் பில் ஒன்றுயிருக்கிறதா (isomorphic) என்பதைச் சரிபார்க்க.
4. ஓர் ஓரினச் சார்பின் அலகுக் கற்றையைக் காண்க.
5. எ.கா. 8·3-ல் கொடுத்துள்ள (G , .) என்ற குழுவில் $a$-ன் பரிமாணம் $m$ என்றால் அந்தப் புனல் சார்பின்

அலகுக் கற்றையைக் காண்க. (எ.கா. 8·8; வகை. 2). $G'$, $\frac{G}{K}$ ஆகியவைகளைக் கண்டுபிடித்து இவ்விரண்டும் அமைப்பில் ஒன்றியிருக்கின்றனவா என்பதைச் சரி பார்க்க.

6. $(Z, +)$-லிருந்து $(Z_{10}-\{0\}, .)$ என்ற குழுவிற்கு, $f$ என்னும் சார்பை,
$x$, 4-ன் மடங்கு (multiple) என்றால் $f(x) = 1$,
$x$ என்பதை 4ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 1 என்றால் $f(x) = 3$,
$x$ என்பதை 4ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 2 என்றால் $f(x) = 9$,
$x$ என்பதை 4ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் மீதி 3 என்றால் $f(x) = 7$,
என்று வரையறை செய்தால் $f$ ஒரு புனல் சார்பு என்று நிரூபிக்க. $f$-ன் அலகுக் கற்றையான Kஐக் காண்க. $(Z, +)$ என்பதை G என்று குறிப்பிட்டால் $G' = f(G)$ என்பது ஓர் உட்குழு என்று நிரூபிக்க.
$\frac{G}{K}$ ஐக் கண்டுபிடித்து அது $G'$ உடன் அமைப்பில் ஒன்றியிருக்கிறது என்று காட்டுக.

7. $(A, .)$, $(B, *)$ ஆகியவை குழுக்கள் என்றும், $f: A \rightarrow B$ ஒரு புனல் சார்பு என்றும் கொள்க. $e, e'$ ஆகியவை முறையே $(A, .)$, $(B, *)$ ஆகியவற்றின் அலகுகள் என்க. இப்பொழுது $f(e) = e'$ என்றும் $(f(a))^{-1} = f(a^{-1})$ என்றும் நிரூபிக்க. (தேற்றம் 3·4-ன் நிரூபணத்தை உபயோகிக்கலாம்.)

பகுதி III

# வளையம்

(Ring)

**முன்னுரை :**

இதுவரையில் நாம் ஒரே ஒரு ஈருருப்புச் செயலி (Binary operation) யைக் கொண்ட கணித அமைப்பான குழுவைப் பற்றிப் படித்தோம். இப்பொழுது நாம் இரண்டு ஈருறுப்புச் செயலிகளைக் கொண்ட வளையம் (Ring) என்னும் கணித அமைப்பைப் பற்றிப் படிக்கப் போகிறோம். எண் அரங்கம் (Integral domain), களம் (Field) ஆகியவை குறிப்பிட்ட சில குணங்களைக் கொண்ட வளையங்களாகும்.

# 1. வரையறையும் சில குணங்களும்

(Definition and some properties)

1·1. **வரையறை :** R என்ற உள்ளீடுள்ள கணத்தில் வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் '+', '.' என்னும் ஈருறுப்புச் செயலிகள் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் (R, +, .) என்னும் கணித அமைப்பு ஒரு வளையம் (Ring) எனப்படும்.

(i) (R, +) என்பது ஒரு பரிமாற்றுக் குழு.

(ii) R என்ற கணம் '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது.

(iii) $(a . b) . c = a . (b . c) \quad \forall\, a, b, c \in R$

(iv) $a . (b+c) = a . b + a . c \quad \forall\, a, b, c \in R$

(v) $(a+b) . c = a . c + b . c \quad \forall\, a, b, c \in R.$

**குறிப்பு :**

இதில் (iii) ஆவது விதி '.'-க்கான சேர்ப்பு விதியாகும் (associative law). (iv) ஆவது விதி இடது பங்கீட்டு விதி (left distributive law) எனப்படும். (v) ஆவது விதி வலது பங்கீட்டு விதி (right distributive law) எனப்படும்.

R என்பது மெய் எண்களின் கணம் என்றோ, +, . என்பவை மெய் எண்களுக்கிடையே உள்ள கூட்டல், பெருக்கல் என்றோ எடுத்துக் கொள்ளக்கூடாது. Ring என்பதால் R என்னும் எழுத்தை உபயோகிக்கிறோம். +, . என்பன வளையத்திலுள்ள இரண்டு செயலிகளையும் குறிப்பதாக நாம் எடுத்துக்கொள்கிறோம். (உண்மையில் இச் செயலிகளுக்கு மெய் எண்களுக்கு இடையே உள்ள கூட்டல், பெருக்கல் ஆகியவற்றின் குணங்களில் பல உள்ளன.)

+ என்னும் செயலியின்கீழ் உள்ள அலகை '0' என்றும், '.' என்ற செயலியின் கீழ் அலகு இருந்தால் அதை 1 என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம். '.' என்ற செயலியின் மேல், மேலும் மேலும் நிபந்தனைகளைச் சுமத்தி, பலவகை வளையங்களைப் பெறலாம். '.' என்ற செயலி பரிமாற்று விதி (commutative law) க்கு உட்பட்டிருந்தால் வளையத்தைப் பரிமாற்று வளையம் (commutative ring) என்றும், '.' என்ற செயலியின் கீழ் அலகு ஒன்று இருந்தால் வளையத்தை அலகையுடைய வளையம் (ring with identity) என்றும் சொல்வது வழக்கம்.

1·2. எ. கா. : Z என்னும் முழு எண்களின் கணத்தில் வரையறுக்கப்படும் சாதாரணக் கூட்டல் (+), சாதாரணப் பெருக்கல் (×) ஆகியவற்றின் கீழ் Z என்பது அலகையுடைய பரிமாற்று வளையமாகும் (commutative ring with identity). அதாவது (Z, +, ×) என்பது மேற்குறிப்பிட்ட வகையிலான வளையமாகும். (விதிகளைச் சரி பார்க்கவும்.) இங்கு +-ன் கீழ் 0 (பூச்சியம்) என்ற அலகும், ×-ன் கீழ் 1 (ஒன்று) என்ற அலகும் உள்ளன.

1·3. எ. கா. : $(Z_5, +, .)$ என்பதுவும் அலகைக் கொண்ட பரிமாற்று வளையமாகும். இதையே பொதுப்படையாக $(Z_m, +, .)$ என்பது அலகைக் கொண்ட பரிமாற்று வளையம் எனலாம்.

1·4. எ. கா. : பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையம் : (Ring of polynomials)

$a_0, a_1, \ldots\ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots\ldots, c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots$ என்பவை மெய் எண்களைக் குறிக்கின்றன என்க. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n$ என்னும் வடிவில் உள்ள கோவையை நாம் பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomial, polynomial expression) என்கிறோம். இதில் $x$ என்பது நிர்ணயிக்காததொன்று என்போம். $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots, c_0, c_1, \ldots\ldots$ ஆகியவை குணகங்கள் (coefficients) எனப்படும். குணகங்கள் மெய் எண்களாக இருக்கும் பல்லுறுப்புக் கோவையை மெய் எண்களின் மேலான பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomial over

reals) எனலாம். P என்பது இத்தகைய பல்லுறுப்புக் கோவைகளை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணம் என்க.

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots + a_n x^n$$
$$B = b_0 + b_1 x + \dots\dots\dots\dots + b_m x^m$$

என்பவை P-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க. P-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் ' + ' என்ற செயலியை,

$$A+B=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_m+b_m)x^m+\dots+a_nx^n \quad (m<n \text{ என்றால்})$$
$$=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n+\dots+b_mx^m \quad (n<m \text{ என்றால்})$$

என்று வரையறுக்கலாம். இச் செயலியின் கீழ் P ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

மேலும் ' . ' என்னும் செயலியை, நாம் சாதாரணமாகக் கோவைகளைப் பெருக்கும் வினை என்க. எடுத்துக்காட்டாக $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ என்றும், $B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ என்றும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$A . B=(a_0+a_1x+a_2x^2)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)$$
$$= a_0b_0+a_0b_1x+a_0b_2x^2+a_0b_3x^3+a_1b_0x + a_1b_1x^2+a_1b_2x^3+a_1b_3x^4+a_2b_0x^2+ a_2b_1x^3+a_2b_2x^4+a_2b_3x^5$$
$$= a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+ a_2b_0)x^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1)x^3+(a_1b_3+ a_2b_2)x^4+a_2b_3x^5$$ ஆகும்.

[இங்கு ஒவ்வோர் உறுப்பின் (term) குணகத்திலும் A-ல் வரும் குணகத்தை முதலிலும், B-ல் வரும் குணகத்தை இரண்டாவதும் கொண்ட பெருக்கற் பலன்களின் கூட்டல் உள்ளது. மேலும் $x^r$ -ன் குணகத்தில் வரும் பெருக்கற் பலன்களில், கீழ்க்குறி (suffix) களின் மொத்தம் (sum) $r$ ஆக உள்ளது.]

இப் பெருக்கலின் கீழ் $p$-ல் $1 + 0x + 0 . x^2$ என்ற கோவை அலகாக உள்ளது. மேலும் மெய் எண்களுக்குப் பங்கீட்டு விதிகள் உண்மையாக இருப்பதால் அவை கோவைகளுக்கும் உண்மையாக இருக்கும். மேலும் மெய் எண்கள் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருப்பதால் பல்லுறுப்புக் கோவைகளும் பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். இவ்வாறு $(p, +, .)$ என்பது அலகையுடைய பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும்.

குறிப்பு : மேலே நாம் மெய் எண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எடுத்துக் கொண்டோம். இதற்குப் பதில் விகிதமுறு எண்கள் (rationals), முழு எண்கள் ஆகியவற்றைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை எடுத்துக் கொண்டாலும் அவை முன்போலவே ஓர் அலகையுடைய பரிமாற்றும் வளையத்தை நிர்ணயிக்கும். உண்மையில் ஏதேனும் ஒரு வளையத்திலுள்ள மூலகங்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகள் ஒரு வளையமாகும். அவ்வளையத்தில் அலகு இருந்தால் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையத்திலும் அலகு இருக்கும். அவ்வளையம் பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால் பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையமும் பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும்.

1·5. எ.கா. : X என்பது உள்ளீடுள்ள ஏதேனும் ஒரு கணம் என்க. இப்பொழுது $(p(X), \triangle, \cap)$ என்பது அலகையுடைய பரிமாற்று வளையமாகும். (இதை நிரூபிக்க முயல்க.)

1·6. எ.கா. : அணிகளினால் வரும் வளையம் (Ring of matrices)

$a, b, c, d$ என்பவை மெய் எண்களாக இருக்கும்பொழுது $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்பது $2 \times 2$ அணி (matrix) ஆகிறது. M என்பது இத்தகைய அணிகளைக் கொண்ட கணம் என்க. M-ல் நாம் '+' என்ற செயலியை $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ என்றால் $A + B = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$ என்று வரையறுக்கலாம். $(M, +)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்பது இப்பொழுது தெளிவு. இதில் $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது அலகாக இருக்கும். $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ என்ற மூலகத்திற்கு $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ என்ற அணி எதிர்மறையாக இருக்கும். M-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் '.' என்னும் ஈருறுப்புச் செயலியை $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix}$ என்று வரையறுக்கலாம். இப்பொழுது $A \cdot B \in M$ என்பது விளங்கும். மேலும் $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ என்னும் சேர்ப்பு விதியை $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ என்று பொதுவாக எடுத்துக்கொண்டு நிரூபிக்கலாம். (நிரூபிக்கவும்.)

$$\text{மேலும் } A.(B+C) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 \\ b_3+c_3 & b_4+c_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1(b_1+c_1)+a_2(b_3+c_3) & a_1(b_2+c_2)+a_2(b_4+c_4) \\ a_3(b_1+c_1)+a_4(b_3+c_3) & a_3(b_2+c_2)+a_4(b_4+c_4) \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{pmatrix}$$

$$A.C = \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_3 & a_1 c_2 + a_2 c_4 \\ a_3 c_1 + a_4 c_3 & a_3 c_2 + a_4 c_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A.B + A.C = \begin{pmatrix} a_1(b_1+c_1)+a_2(b_3+c_3) & a_1(b_2+c_2)+a_2(b_4+c_4) \\ a_3(b_1+c_1)+a_4(b_3+c_3) & a_3(b_2+c_2)+a_4(b_4+c_4) \end{pmatrix}$$

இவ்வாறு $A.(B+C) = A.B + A.C$; இதுபோலவே வலது பங்கீட்டு விதியையும் நிருபிக்கலாம். எனவே $(M, +, .)$ ஒரு வளையம் என்பது விளங்கும்.

இது பரிமாற்று வளையம் அல்ல. ஏனெனில் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ஆனால் $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

இவ்வளையத்தில் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ என்னும் அணி அலகாக இருக்கும். எனவே $(M, +, .)$ என்பது அலகையுடைய ஒரு வளையமாகும்.

குறிப்பு : மெய் எண்களால் நிரப்பப்பட்டிருப்பதற்குப் பதில் விகிதமுறு எண்களால் நிரப்பப்பட்டிருப்பினும் $(M, +, .)$ அலகையுடைய ஒரு வளையமாகும். இதுபோல் முழு எண்களால் நிரப்பப் பட்டிருக்கும் அணிகளும் ஓர் அலகையுடைய வளையத்தை நிர்ணயிக்கும். உண்மையில் ஏதேனும் ஒரு வளையத்தின் மூலகங்களால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் அணிகள் ஒரு வளையமாகும். அவ்வளையத்தில் அலகு இருந்தால் அணிகளின் வளையத்திலும் அலகு இருக்கும்.

வளையத்தைப் பற்றிப் பின்வருவனவற்றில் $(R, +, .)$ என்பதை வளையம் என்றும், $(-a)$ என்பதை $+$-ன் கீழ் $a$-ன் எதிர்மறை

மூலகம் என்றும், '$0$' என்பதை $+$-ன் கீழ் அலகு என்றும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

**1·7. குணம் :** $a \,.\, 0 = 0 \,.\, a = 0 \qquad \forall\, a \in R.$

**நிரூபணம் :** $0 = 0 + 0$

$\therefore\; a \,.\, 0 = a \,.\, (0 + 0) \qquad \forall\, a \in R.$

அதாவது $a \,.\, 0 = a \,.\, 0 + a \,.\, 0$ (இடது பங்கீட்டு விதி)

அதாவது $a \,.\, 0 + 0 = a \,.\, 0 + a \,.\, 0$

($0$ என்பது '$+$'-ன் கீழ் அலகு)

$\therefore\; 0 = a \,.\, 0$

[ $(R, +)$ ஒரு குழுவாகையால், இடது நீக்கல் விதிப்படி]

இவ்வாறு $a \,.\, 0 = 0 \quad \forall\, a \in R.$

இதுபோலவே $0 \,.\, a = 0 \quad \forall\, a \in R$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

**1·8. குணம் :** $a \,.\, (-b) = (-a) \,.\, b = -(ab) \quad \forall\, a, b \in R$

**நிரூபணம் :** $a, b$ என்பன R-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க.

இப்பொழுது $0 = a + (-a)$ ($-a$ என்பது $a$-ன் எதிர்மறை)

$\therefore\; 0 \,.\, b = [\, a + (-a) \,] \,.\, b$

$\therefore\; 0 = a \,.\, b + (-a) \,.\, b$

(குணம் 1·7 & வலது பங்கீட்டு விதி)

இதுபோலவே $[\,(-a) + a\,] \,.\, b$ என்பதை எடுத்து $(-a) \,.\, b + a \,.\, b = 0$ என்று நிரூபிக்கலாம். எனவே $(-a) \,.\, b$ என்பது $a \,.\, b$-ன் எதிர்மறை ஆகும் அதாவது $(-a) \,.\, b = -(ab)$. இதுபோலவே $a \,.\, (-b) = -(ab)$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

**1·9. குணம் :** $(-a) \,.\, (-b) = a \,.\, b \quad \forall\, a, b \in R.$

**நிரூபணம் :** $(-a) \,.\, (-b) = -[\, a \,.\, (-b) \,]$

$(\because (-c) \,.\, d = -(c \,.\, d))$

$= -[\, -(a \,.\, b) \,]$

$(\because a \,.\, (-b) = -(a \,.\, b))$

$= a \,.\, b$

குறிப்பு : மேலே குறிப்பிட்ட மூன்று குணங்களிலும் $(R, +)$-ன் பரிமாற்றுத் தன்மையை நாம் உபயோகிக்கவில்லை.

**1·10. குணம் :** $-(a+b) = (-a) + (-b) \quad \forall\, a, b \in R.$

**நிரூபணம் :** எந்த ஒரு குழுவிலும், $a^{-1}$, $b^{-1}$ என்பன $a, b$ ஆகியவற்றின் எதிர் மறைகள் என்றால் $(a \,.\, b)^{-1} = b^{-1} \,.\, a^{-1}$" என்று நாம் முன்னர் நிரூபித்துள்ளோம். இங்கு $a^{-1}$-ன் இடத்தை '$-a$'-ம் ' . '-ன் இடத்தை ' + '-ம் பிடித்துக்கொண்டுள்ளன. எனவே, $(a \,.\, b)^{-1} = b^{-1} \,.\, a^{-1}$ என்பது $-(a+b) = (-b) + (-a)$ என்று மாறிவரும். $(R, +)$ என்பது பரிமாற்றுக் குழுவாகையால் $(-b) + (-a) = (-a) + (-b)$. இவ்வாறு $-(a+b) = (-b) + (-a)$.

**குறிப்பு 1 :** இதையே எதிர்மறைக்கான வரையறையை உபயோகித்தும் நிரூபிக்கலாம். அதாவது $[a+b] + [(-a) + (-b)] = [(-a) + (-b)] + [a + b] = 0$ என்று நிறுவுவதன் மூலம் நிரூபிக்கலாம்.

**குறிப்பு 2 :** $a + (-b)$ என்பதை '$a-b$' என்று எழுதுவது வழக்கம்.

**1·11. குணம் :** $a \,.\, (b-c) = a \,.\, b - a \,.\, c \quad \forall\, a, b, c \in R.$
(இதை நிரூபிக்க.)

**1·12. குணம் :** 1 என்பது $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் ' . '-ன் கீழ் உள்ள அலகு என்றால் $(-1) \,.\, a = a \,.\, (-1) = -a$ $\forall\, a \in R$ (இதை நிரூபிக்க.)

**1·13. வரையறை :** $a+a=2a$ என்றும், $a+a+a$ என்பதை $3a$ என்றும் குறிப்பிடுவோம். பொதுவாக '$a+a+\ldots m$ தடவைகள்' என்பதை $ma$ என்று குறிப்பிடுவோம். மேலும் $(-a)+(-a)+\ldots m$ தடவைகள் என்பதை $(-m)\, a$ அல்லது $m\,(-a)$ என்று குறிப்பிடுவோம். $0 \in Z$ என்றால் $0a = 0$ என்பது இவ்வரையறைகளோடு பொருந்துவதாகும்.

**1·14. குணம் :** $m\,(-a) = -(ma)$

**நிரூபணம் :** $m\,(-a) = (-a) + (-a) + \ldots m$ தடவைகள்

எனவே $m\,(-a) + ma = [(-a) + (-a) + \ldots m$ தடவைகள்$]$ $+ [a + a + a \ldots\ldots m$ தடவைகள். $]$

வலப்புறத்தில் உள்ள மூலகங்களை இரண்டிரண்டாகக் கோர்த்துச் சுருக்கினால் ' 0 ' தான் மிஞ்சும்.

எனவே $m(-a) + ma = 0$
மேலும் (R, +) பரிமாற்றுக் குழுவாகையால் $ma + m(-a) = 0$.
இவ்வாறு $m(-a)$ என்பது $(ma)$-ன் எதிர்மறை ஆகும்.
அதாவது $m(-a) = -(ma)$.

**1·15. குணம்:** $a, b$ என்பன R-ன் மூலகங்களாகவும் $m$ என்பது முழு எண்ணாகவும் இருந்தால் $m(a+b) = ma + mb$.

**நிரூபணம்:** $m$ என்பது $0$ (பூச்சியம்) என்றால் இது வெளிப்படையாகும்.

**வகை 1:** $m$ என்பது மிகை எண் என்க.

$m(a+b) = (a+b)+(a+b)+\ldots\ldots m$ தடவைகள்.

இங்கு (R, +) ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகையால்
$m(a+b) = a+a+\ldots\ldots\ldots m$ தடவைகள் $+b+b+b+\ldots\ldots\ldots$
$m$ தடவைகள்.
$= ma + mb$.

**வகை 2:** $m$ என்பது குறை (negative) எண் என்க.

இப்பொழுது $m = -n$, $n$ ஒரு நேர்த்திசை எண் என்க.

இப்பொழுது $m(a+b) = (-n)(a+b)$
$= [-(a+b)]+[-(a+b)]+\ldots n$ தடவைகள்
$= [(-a)+(-b)]+[(-a)+(-b)]+\ldots\ldots n$ தடவைகள்
$= (-a)+(-a)\ldots\ldots n$ தடவைகள் $+(-b)+(-b)\ldots\ldots$
$n$ தடவைகள் [(R, +) ஒரு பரிமாற்றுக் குழு]
$= (-n)a + (-n)b$ (வரையறைப்படி)
$= ma + mb$.

**1·16. குணம்:** $(m+n)a = ma + na, \ \forall a \in R \ \& \forall m, n \in Z$.
[இதை முன்போலவே நிரூபிக்கலாம்; நிரூபிக்க.]

**1·17. குணம்:** $(mn)a = m(na) \ \forall a \in R \ \& \forall m, n \in Z$.
[இதையும் முன்போலவே நிரூபிக்கலாம்; நிரூபிக்க.]

**1·18. வரையறை:** $a$ என்பது (R, +, .) என்ற வளையத்தினுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $p$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண்ணாக இருந்தால் $a^p$ என்பதை $a^p = a \, . \, a \ldots\ldots\ldots$ $p$ தடவைகள் என்று வரையறுக்கலாம்.

$p$, $q$ ஆகியவை மிகை முழு எண்களாக இருக்கும்போது பின் வரும் குணங்கள் உண்மை என்று நிரூபிக்கலாம்.

1·19. குணம் : $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

1·20. குணம் : $(a^p)^q = a^{pq}$.

குறிப்பு : மேலே குறிப்பிட்ட குணங்களிலிருந்து, மெய் எண்களுக்குள்ள குணங்களில் பல, வளையத்திலுள்ள மூலகங்களுக்கும் உள்ளன என்பது விளங்கும். ஆனால் வளையம் என்பது குறிப்பிட்ட சில நிபந்தனைகளை மட்டுமே கொண்டுள்ள கணித அமைப்பாகும். எனவே நாம் நிபந்தனைகளை மேலும் மேலும் சேர்த்து மெய் எண்களின் அண்மையில் வந்துகொண்டிருக்கிறோம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

## பயிற்சி

1. $\{a, b, c, d\}$ என்ற கணம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $+$, $.$ என்னும் செயலிகளின் கீழ் வளையமாக இருக்குமா என்பதைக் காண்க.

| + | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | a | b |
| d | d | c | b | a |

| . | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a |
| b | a | b | c | d |
| c | a | c | c | a |
| d | a | d | a | d |

2. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ என்னும் கணம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $+$, '.' என்னும் செயலிகளின் கீழ் வளையமாக இருக்குமா என்பதைக் காண்க.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 6 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 2 | 6 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 1 | 6 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 4 | 1 | 3 | 2 |
| 6 | 6 | 3 | 2 | 5 | 1 | 4 |

| . | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 |
| 2 | 5 | 2 | 3 | 4 | 6 | 1 |
| 3 | 3 | 6 | 2 | 1 | 5 | 4 |
| 4 | 6 | 4 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 1 | 5 | 3 | 2 | 3 |

3. பின்வரும் கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் செயலிகளின் கீழ் வளையங்களா என்பதைக் காண்க. வளையங்கள் என்றால் அலகு உள்ளவையா, பரிமாற்று வளையங்களா என்பதையும் காண்க.

| எண் | கணம் | + | . |
|---|---|---|---|
| 1 | $\{a+bi \mid a, b$ என்பன மெய் எண்கள் $\}$ | $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ | $(a+bi).(c+di) = ac-bd+(bc+ad)i.$ |
| 2 | $\{a+bi \mid a,b$ என்பன விகிதமுறு எண்கள் $\}$ | ,, | ,, |
| 3 | $\{a+bi \mid a, b$ என்பன முழு எண்கள் $\}$ | ,, | , |
| 4 | $\{a+b\sqrt{2} \mid a,b$ என்பன முழு எண்கள் $\}$ | மெய் எண்களுக்கான கூட்டல் | மெய் எண்களுக்கான பெருக்கல் |
| 5 | $\{(a,b,c) \mid c,b,c$ என்பன முழு எண்கள் $\}$ | $(a, b, c)+(d,e,f)=(a+d, b+e, c+f)$ | $(a, b, c).(d,e,f) = (ad, be, ef)$ |
| 6 | $\{(a\ b) \mid a, b$ என்பன முழு எண்கள் $\}$ | $(a,b)+(e,d)= (a+c, b+d)$ | $(a,b).(c,d)= (ac-bd,ad+bc)$ |

4. G என்பது மெய் எண்களிலிருந்து மெய் எண்களுக்கு வரையறுக்கப்பட்ட சார்புகளின் கணம் என்க. இப்பொழுது G-ல் உள்ள மூலகங்கள் சார்புகள். அவற்றிற்கிடையில் $+$, $.$ என்னும் ஈருறுப்புச் செயலிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்க. $f, g \in G$ என்றால் $(f+g)\,x = f(x) + g(x)$ & $(f\,.\,g)(x) = f(x)\,.\,g(x)$. இப்பொழுது $(G, +, .)$ ஒரு வளையமா என்பதைக் காண்க.

5. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. R-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை $a \oplus b = b + a$ ; $a \odot b = b\,.\,a$ என்று வரையறுத்தால் $(R, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையமா என்பதைக் காண்க. $(R, +, .)$ ஒரு பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால் அதன் பலன் $(R, \oplus, .)$-ல் என்னவாக இருக்கும்? $(R, +, .)$ அலகையுடைய வளையமாக இருந்தால் அதன் பலன் $(R, \oplus, \odot)$-ல் என்னவாக இருக்கும்?

6. (a) $(R, +, .)$ என்பது அலகையுடைய ஒரு வளையம் என்க. '0', 'e' ஆகியவை முறையே $+, .$ ஆகியவற்றிற்கான அலகுகள் என்க. R-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளைப் பின்வருமாறு வரையறுக்க. $a \oplus b = a + b + e$; $a \odot b = a . b + a + b$. இப்பொழுது $(R, \oplus, \odot)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்று நிரூபிக்க. ($-e$, $0$ ஆகியவை முறையே $\oplus$, $\odot$ ஆகியவற்றின் கீழ் அலகுகளாக இருக்கும்.)

(b) $(R, +, .)$ என்பது பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால், $(R, \oplus, \odot)$-ல் அதன் பலன் (effect) என்ன என்பதைக் காண்க.

7. பயிற்சி 6-ல் $a \oplus b = a + b - e$; $a \odot b = a + b - a . b$ என்று வரையறுத்திருந்தால் $(R, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையமாக இருக்குமா என்பதையும், $(R, +, .)$ பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால் $(R, \oplus, \odot)$-ல் அதன் பலனையும் காண்க.

8. (a) $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus\ \odot)$ ஆகியவை இரண்டு வளையங்கள் என்க. $R_1 \times R_2$-ல் $\ominus$, $\times$ என்னும் செயலிகளை, $(a, b) \ominus (c, d) = (a + c, b \oplus d)$ என்றும் $(a, b) \times (c, d) = (a . c, b \odot d)$ என்றும் வரையறுத்தால் $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ ஒரு வளையம் என்றும் நிரூபிக்க.

(b) பின்வருவனவற்றில் எவை சரியானவை என்பதைக் குறிப்பிடுக.

(i) $(R_1, +, .)$ என்பது அலகையுடைய வளையமாக இருந்தால் $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ என்பதுவும் அலகையுடைய வளையம்.

(ii) $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரண்டும் அலகையுடைய வளையங்கள் என்றால் $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ என்பதுவும் அலகையுடைய வளையம்.

(iii) $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ அலகையுடைய வளையமாக இருந்தால், $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரண்டும் அலகையுடையனவாக இருக்கும்.

(iv) $(R_1, +, .)$ என்பது பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால் $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ என்பதுவும் பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும்.

(v) $(R_1 \times R_2, \ominus, \times)$ பரிமாற்று வளையம் $\Longleftrightarrow$ $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரண்டும் பரிமாற்று வளையங்கள்.

9. பயிற்சி 8 (a)-ஐப் போன்ற பயிற்சியை $n$ வளையங்களை எடுத்துக் கொண்டு உருவாக்குக.

10. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. $R \times R$-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$; $(a, b) \odot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$ என்று வரையறை செய்தால் $(R \times R, \oplus, \odot)$ என்பது ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்கவும். '$(R, +, .)$ என்பது பரிமாற்று வளையமாக' இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை "$(R \times R, \oplus, \odot)$ ஒரு பரிமாற்று வளையம்" என்று நிரூபிக்க.

11. $a.(b+c+d) = a.b + a.c + a.d$ என்றும், $(a+b+c).d = a.d + b.d + c.d$ என்றும் நிரூபிக்க.

12. $a.(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = a.b_1 + a.b_2 + \ldots + a.b_n$ $\forall a, b_i \in R$;

$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).b = a_1.b + a_2.b + \ldots + a_n.b$ $\forall a_i, b \in R$ என்பனவற்றை நிரூபிக்க.

13. $(R, +, .)$ என்ற வளையத்திற்கு '.' -ன்கீழ் 1 என்ற அலகு இருந்தால் $1.(-a) = (-a).1 = -a$, $\forall a \in R$ என்று நிரூபிக்க.

14. $n$ என்பது ஏதேனும் ஒரு மிகை முழு எண்ணாக இருந்தால் $n(a.b) = (na).b = a.(nb)$ என்று நிரூபிக்க.

15. $(R, +, .)$ என்னும் கணித அமைப்பு வளையத்திற்குத் தேவையான குணங்களில் கூட்டலுக்கான பரிமாற்று விதியைத் தவிர வேறு எல்லாவற்றிற்கும் உட்பட்டிருக்கிறது என்க. "$c.a = c.b \Longrightarrow a = b$" என்னும்படியாக $c$ என்னும் மூலகம் R-ல் இருந்தால் (அதாவது $c$ ஐ இடப்புறத்திலிருந்து நீக்கலாம்) $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க.

நிரூபணம் : $a+b=b+a \quad \forall\, a, b \in R$ என்று நிரூபிக்க.
$(-b)+(-a)+a+b=0$ என்று நிறுவலாம்.

இடப் புறத்தில் $c$ என்னும் மூலகத்தினால் '.' என்ற செயலைச் செய்யும்போது $c.[(-b)+(-a)+a+b]=c.0$

அதாவது $c.[(-b)+(-a)+(a+b)]=0$
($c.0=0$ என்பதை, குணம் 1.7-ல் பரிமாற்றுத் தன்மை இல்லாமலே நிரூபித்துள்ளோம்)

அதாவது $c.(-b)+c.(-a)+c.(a+b)=0$

$a.(-b)=(-a).b=-ab$ என்பதை குணம் 1.8-ல் பரிமாற்றுத் தன்மை இல்லாமலே நிரூபித்துள்ளோம்.
எனவே $c.(-b)=(-c).b$ ; $c.(-a)=(-c).a$.

எனவே $(-c).b+(-c).a+c.(a+b)=0$

அதாவது $(-c).(b+a)+c.(a+b)=0$
(இடது பங்கீட்டு விதி)

அதாவது $-[c.(b+a)]+c.(a+b)=0 \quad [(-a).b]=-a.b]$
இங்கு $c.(b+a)$ ஆல் இடப்புறத்தில் + என்ற செயலை நிகழ்த்திச் சுருக்கினால் $c.(a+b)=c.(b+a)$ என்று கிடைக்கிறது.

∴ $a+b=b+a \qquad (\because c.a=c.b \Longrightarrow a=b)$
எனவே '+' பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருக்கிறது.

குறிப்பு 1 : இங்கு நாம் கொடுத்துள்ள நிரூபணத்தில் $-(a+b)=(-a)+(-b)$ போன்றவற்றை உபயோகிக்க முடியாது. ஏனெனில் (R, +) ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்பதை உபயோகித்துத்தான் $-(a+b)=(-a)+(-b)$ என்று நாம் நிரூபித்தோம்.

குறிப்பு 2 : (R, +, .) என்ற வளையத்திலுள்ள '$a$' என்ற மூலகம் $ax=ay \Longrightarrow x=y$ ; $xa=ya \Longrightarrow x=y$ என்னும் இரு விதிகளுக்கும் உட்பட்டிருந்தால் அது (R, +, .) என்ற வளையத்தில் ஒழுங்கானது (regular) எனப்படும். ($a$ is regular in the ring).

16. பயிற்சி 1[illegible] ஒன்றை வலது நீக்கல் விதிக்கு எழுதி நிரூபி[illegible]

17. $(R, +, .)$ என்ற கணித அமைப்பு வளையத்திற்குத் தேவையான குணங்களில் கூட்டலுக்கான பரிமாற்று விதியைத் தவிர வேறு எல்லாவற்றிற்கும் உட்பட்டிருக்கிறது எனக.

(a) $a.e = a \quad \forall\, a \in R$ என்னும்படியாக $e$ என்ற மூலகம் (right identity) R-ல் இருந்தால் $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(b) $e.a = a \quad \forall\, a \in R$ என்னும்படியாக $e$ என்ற இடது அலகு R-ல் இருந்தால் $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க.

18. பயிற்சிகள் 15, 16 17 ஆகியவற்றிலிருந்து வளையத்திற்கான மாற்று வரையறைகளைத் தொகுத்து எழுதுக.

19. $(R, +, .)$ என்ற கணித அமைப்பு வளையத்திற்குள்ள நிபந்தனைகளில் வலது, இடது பங்கீட்டு விதிகளைத் தவிர வேறு எல்லாவற்றிற்கும் உட்பட்டிருக்கிறது என்க. '$0$' என்பது $+$-ன் கீழ் அலகு என்க. மேலும் $(R-\{0\}, .)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழு என்க. இப்பொழுது $(R, +, .)$ பங்கீட்டு விதிகளுக்கு

(a) உட்பட்டிருக்க வேண்டும்,

(b) உட்பட்டிருக்க வேண்டியதில்லை

என்பவற்றுள் எது சரியானது என்பதை முறையே நிருபணம் அல்லது காரணங் கொண்டு ஆய்க.

குணம் 1·7 ஐயும் பின்வரும் $(\{0, 1, 2\}, +, .)$ என்ற உதாரணத்தையும் கவனத்தில் கொள்க.

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| · | 1 | 2 | 0 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 |
| 0 | 2 | 1 | 1 |

20. ஒரு வளையத்தில் உள்ள $a$ என்ற மூலகம் "$a.a = a$" என்னும் விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் $a$ என்பது $.$-ன் கீழ் தன் ஆற்றல் மூலகம் (idempotent element) எனப்படும். (கணத்தின் இணைப்பு, கணத்தின் வெட்டு ஆகியவற்றின் கீழ் ஒவ்வொரு கணமும் தன்னாற்றல் மூலகமாகும்.)

(i) ஒரு வளையத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் தன் ஆற்றல் மூலகமாக இருந்தால் அது பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்கவும். [ $(a.b).(a.b) = a.b$ என்பதை உபயோகிக்கவும்.]

(ii) ஒரு பரிமாற்று வளையத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் தன் ஆற்றல் மூலகமாக இருக்க வேண்டியதில்லை என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டுத் தருக.

(iii) ஒவ்வொரு செயலியின் கீழும் அலகானது தன் ஆற்றல் மூலகம் என்று நிரூபிக்க.

21. ஒன்றிற்கு மேல் மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு வளையத்தில் $0$, $e$ ஆகியவை $+$ , . என்னும் செயலிகளின் கீழ் அலகாக இருந்தால் $e \neq 0$ என்று நிரூபிக்க.

22. ஒவ்வொரு பரிமாற்றுக் குழுவையும் பொருத்தமாக ஒரு செயலியை வரையறுத்து வளையமாக்க முடியும் என்று நிரூபிக்க.

# 2. உள் வளையங்கள், குண எண், அலகுக் காரணிகள்

**(Sub-rings, Characteristic & Units)**

**2·1.** வரையறை: $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. S என்பது R-ன் உட்கணம் என்க. இப்பொழுது $(S, +, .)$ ஒரு வளையமாக இருந்தால் $(S, +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் உள் வளையம் எனப்படும்.

$(R, +, .)$ என்ற வளையத்திற்கு $(R, +, .)$, $(\{0\}, +, .)$ ஆகிய இரண்டும் எப்பொழுதுமே உள் வளையங்களாக இருக்கும். ஆனால் இவை முறையற்ற உள் வளையங்கள் (improper sub-rings) எனப்படும்.

**2·2.** எ. கா.: $(R, +, .)$ என்பது மெய் எண்களின் வளையத்தையும், $(Q, +, .)$ என்பது விகிதமுறு எண்களின் வளையத்தையும் குறிக்கிறது என்றால் $(Q, +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் உள் வளையமாகும்.

**2·3.** எ. கா.: $(Z, +, .)$ என்ற முழு எண்களின் வளையம், $(Q, +, .)$ என்ற விகிதமுறு எண்களின் வளையத்திற்கு உள் வளையமாகும்.

**2·4.** எ. கா.: $(m\mathbb{Z}, +, .)$ என்னும் $m$-ன் மடங்குகளின் (multiples of $m$) வளையமானது $(Z, +, .)$ என்ற முழு எண்களின் வளையத்திற்கு உள் வளையமாகும்.

**2·5.** தேற்றம்: $(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்றும் $S \subseteq R$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $(S, +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் உள் வளையமாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனைகள்.

(i) $a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S$

(ii) $a, b \in S \Longrightarrow a . b \in S$ என்பவைகளாகும்.

நிரூபணம் : தேவையானது என்று நிரூபிக்க :

$(S, +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் உள் வளையம் என்க.

$a, b \in S$ என்க. $(S, +)$ ஒரு குழுவாகையால் $a - b \in S$ ... ... ... (i)

[ch. II. 3·5 தேற்றம்]

மேலும் $(S, +, .)$ ஒரு வளையமாகையால் S என்ற கணம் '.'-ன் கீழ் அடைக்கப்பட்டிருக்கும். அதாவது $a, b \in S \Longrightarrow a \cdot b \in S$ ... ... ... (ii)

போதுமானது என்று நிரூபிக்க :

இங்கு $S \subseteq R$ ; $(R, +, .)$ ஒரு வளையம்.

$$a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$c, b \in S \Longrightarrow a \cdot b \in S \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$(R, +)$ ஒரு குழுவாகவும், $a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S$ என்றும் இருப்பதால் ch. II தேற்றம் 3·5-ன்படி $(S, +)$ ஓர் உட்குழுவாகும். $(R, +)$ பரிமாற்றுக் குழுவாகையால் $(S, +)$-ம் பரிமாற்றுக் குழுவாகும். ... ... (3)

மேலும் $a, b \in S \Longrightarrow a . b \in S$.

அதாவது S என்ற கணம் '.' என்ற செயலியின்கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது ... ... ... (4)

$$a, b, c \in S \Longrightarrow a, b, c \in R$$
$$\Longrightarrow (a . b) . c = a (b. c) \quad \ldots \quad (5)$$

இதுபோலவே $S \subseteq R$ என்பதாலும் R-ன் மூலகங்கள் பங்கீட்டு விதிகளுக்கு உட்பட்டிருப்பதாலும் S-ன் மூலகங்களும் பங்கீட்டு விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கும். ... ... (6)

(3), (4), (5), (6) ஆகியவற்றிலிருந்து $(S, +, .)$ ஓர் உள் வளையமாகும்.

இவ்வாறு தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

குறிப்பு: மேலேயுள்ள தேற்றத்திலுள்ள நிபந்தனைகளில் $a, b \in S \Longrightarrow a-b \in S$ என்பது $(S, +)$ ஒரு குழு என்று காட்டவும், $a, b \in S \Longrightarrow a . b \in S$ என்பது, S என்ற கணம் '.' என்ற செயலியின் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது என்று நிறுவவும் பயன் படுகின்றன. மீதி உள்ள குணங்கள் அனைத்தும் தாய் வளையத்தி லிருந்து அப்படியே கிடைக்கின்றன (inherited). முடியும் குழுவின் உட்கணம் ஒன்று உட்குழுவாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை ஒன்று உள்ளது (ch. II. தேற்றம் 8·6). அதை உபயோகித்தால் பின்வரும் தேற்றம் கிடைக்கும்.

**2·6. தேற்றம்:** $(R, +, .)$ என்பது ஒரு முடியும் வளையம் (finite ring, முடியும் அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட வளையம்) என்றும் $S \subseteq R$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் "$(S, +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் உள் வளையமாக" இருப்பதற்குத் தேவை யானதும் போதுமானதுமாகிய (necessary and sufficient) நிபந்தனைகள்

(i) $a, b \in S \Longrightarrow a + b \in S$

(ii) $a, b \in S \Longrightarrow a . b \in S$ ஆகிய இரண்டுமாகும்.

**2·7. தேற்றம்:** $(S_1, +, .)$, $(S_2, +, .)$ ஆகிய இரண்டும் $(R, +, .)$ என்னும் வளையத்தின் உள் வளையங்கள் என்றால் $(S_1 \cap S_2, +, .)$ என்பதுவும் $(R, +, .)$-ன் உள் வளையமாக இருக்கும்.

[தேற்றம் 2·5ஐ உபயோகித்து, குழுவுக்கான இத்தகைய தேற்றத்தைப்போல் நிருபிக்கவும்.]

குறிப்பு: தேற்றம் 2·7-ன் நிபந்தனையின்கீழ் $(S_1 \cup S_2, +, .)$ என்பது வளையமாக இருக்கவேண்டியதில்லை என்பதைப் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு உணர்த்தும்.

**2·8. எ. கா.:** $(2\mathbb{Z}, +, .)$, $(3\mathbb{Z}, +, .)$ ஆகிய இரண் டும் $(Z, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உள் வளையங்கள். இங்கு $(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}, +, .)$ ஒரு வளையம் அல்ல. ஏனெனில் $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$ என்ற கணம் + -ன்கீழ் அடைக்கப்படவில்லை.

($\because 2, 3, \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, ஆனால் $2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.)

**2·9. தேற்றம்:** $(S_1, +, .)$, $(S_2, +, .)$ ......... $(S_n, +, .)$ என்பவை $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உள் வளையங்கள் என்றால்,

$(S_1 \cap S_2 \cap \ldots\ldots S_n, +, .)$ என்பதுவும் $(R, +, .)$-ன் உள் வளையமாக இருக்கும்.

நிரூபணம்: இதைத் தேற்றம் 2·7 ஐ உபயோகித்து, கணிதத் தொகுப்பாய்வு (mathematical induction) மூலம் நிரூபிக்கலாம்; வேறு வழியிலும் நிரூபிக்கலாம். (நிரூபிக்கவும்).

தேற்றங்கள் 2·7, 2 9 ஆகியவற்றைப் போல் $(S_i, +, .)$; $i \in J$ என்பது உள் வளையங்கள் அடங்கிய ஏதேனும் ஒரு கூட்டம் என்றால், $\left(\bigcap_{i \in J} S_i, +, .\right)$ என்பதுவும் ஓர் உள் வளையம் என்று பொதுவாகக் கூறலாம் ஒவ்வொரு உள்வளையத்திலும் '0' உள்ளது. மேலும் $(\{0\}, +, .)$ என்பதே ஒரு வளையமாகும் ]

**2·10. வரையறை:** $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்றும் $S \subseteq R$ என்றும் எடுத்துக்கொள்க இப்பொழுது S ஐத் தன்னுட் கொண்ட உள் வளையங்களின் வெட்டு (intersection) ஒரு வளையமாக இருக்கும்; இவ்வளையம் S ஆல் உருவாக்கப்படும் வளையம் (sub-ring generated by S) எனப்படும். இதை [[S]] என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.

இப்பொழுது [[ · ]] என்பதைப் பின்வரும் மூன்று குணங்களால் நிர்ணயிக்கலாம். (i) [[S]] ஓர் உள் வளையம், (ii) $[[S]] \supseteq S$ (iii $(T, +, .)$ என்பது S ஐத் தன்னுட் கொண்ட ஏதேனும் ஓர் உள்வளையம் என்றால் $T \supseteq [[S]]$.

$(R, +, .)$ என்பது எப்பொழுதுமே S ஐக் கொண்டுள்ள உள் வளையமாக இருப்பதாலும் $(\{0\}, +, .)$ என்பது ஒவ்வொரு வளையத்திற்கும் உள்வளையமாக இருப்பதாலும் [[S]] என்பது எப்பொழுதுமே கண்டுபிடிக்கக்கூடிய ஒன்றாகும். ([[S]] always exists.)

**2·11. வரையறை:** $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் $(R, +)$ என்னும் குழுவில் ஒரு பரிமாணம் (order) இருக்கும். R-ல் உள்ள மூலகங்களுக்கு $(R, +)$-ல் உள்ள பரிமாணங்களின் உச்ச வரம்பாக (maximum) $m$ என்னும் முழு எண் இருந்தால் $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தின் குண எண் (characteristic) '$m$' எனப்படும். R-ன் மூலகங்களின் பரிமாணங்களுக்கு உச்சவரம்பு இல்லாவிட்டால் $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தின் குண எண் '0' (பூச்சியம்) எனப்படும். [இதையே $\infty$ என்று வரையறுப்பாரும் உளர். ஆனால் நாம் 0 என்றே எடுத்துக்கொள்வோம்.

**2·12. எ. கா.:** X என்பது மூலகத்தையுடைய ஒரு கணம் என்க. $(P(X), \triangle, \cap)$ என்னும் வளையத்தில் $\phi$ ஐத் தவிர மீதியுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் 2 ஆகும். ஏனெனில் $A \triangle A = \phi$. எனவே வரையறைப்படி $(P(X), \triangle, \cap)$ என்னும் வளையத்தின் பரிமாணம் 2 ஆகும்.

**2·13. எ. கா.:** $(Z_6, +, .)$ என்னும் வளையத்தின் குண எண் 6 ஆகும்.

**2·14. எ. கா.:** $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்தின் குண எண் 0 (பூச்சியம்) ஆகும்.

**குறிப்பு:** முடியும் அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட வளையத்தின் குண எண் 0 ஆக இருக்க முடியாது. ஏனெனில் முடியும் குழுவினுள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் (அக்குழுவின் பரிமாணத்தை விடக் கூடாத) முடியும் பரிமாணம் உள்ளது. ஆனால் முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஒரு வளையத்தின் பரிமாணம் 0 அல்லாத முழு எண்ணாக இருக்கலாம். இதை எ.கா. 2·12 விளக்கும்.

**2·15. தேற்றம்:** $(R, +, .)$ என்ற அலகையுடைய வளையத்தில் அலகின் பரிமாணம் $m$ என்றால் ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $m$ அல்லது அதன் காரணியாக இருக்கும்.

**நிரூபணம்:** வளையத்தின் அலகு என்பது '.' ன் கீழ் உள்ள அலகையே குறிக்கும். $e$ என்பது '.'-ல் அலகு என்றும், $a$ என்பது R-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $e$-ன் பரிமாணம் $m$ என்பதால்,

$e + e \ldots m$ தடவைகள் $= 0$ (0 என்பது $(R, +)$ ன் அலகு.)
இப்பொழுது $a.(e + e + \ldots m$ தடவைகள்$) = a.0$

அதாவது $a.e + a.e + \ldots m$ தடவைகள் $= 0$ $\qquad (a.0 = 0)$

அதாவது $a + a + \ldots m$ தடவைகள் $= ma = 0$ $\qquad \ldots (1)$
எனவே $a$, முடியும் பரிமாணத்தைக் கொண்டது.

$pa = 0$ என்னும்படியாக உள்ள $p$ என்ற நேர்த்திசை முழு எண்களில் மிகவும் சிறியது $n$ என்க. இப்பொழுது (1)-லிருந்து $n \leq m \ldots (2)$

இப்பொழுது $na = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots (3)$
(2)-லிருந்து $m = q.n + r,\ 0 \leq r < n,\ q > 0$ என்னும்படியாக $q, r$ என்னும் முழு எண்கள் உள்ளன.

$\therefore \quad m - qn = r \;:\; 0 \leq r < n \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

மேலும் (1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $ma = 0$, $na = 0$.

$\therefore \quad q(na) = q0$

அதாவது $(q.n)\,a = 0$ (குணம் 1·17)

இவ்வாறு $ma - (q\,n)\,a = 0 - 0 = 0$.

அதாவது $(m - q\,n)a = 0$ (குணம் 1·16)

எனவே (4)-லிருந்து $ra = 0$; $0 \leq r < n$

{ இங்கு $ra = 0$-ல் உள்ள 0, (R, +)-ன் அலகாகும்.
{ $0 \leq r < n$-ல் உள்ள, 0, 0 என்ற முழு எண்ணாகும்.

எனவே (2)-ல் நாம் $n$ ஐ எடுத்துக்கொண்ட விதத்திலிருந்து $r = 0$.

$\therefore$ (4)-லிருந்து $m - qn = 0 \Longrightarrow m = q.n,\; q > 0$

$\therefore$ $n$ என்பது $m$-ன் காரணியாகும்.

ஆனால் (2)-லிருந்து $a$-ன் பரிமாணம் $n$ ஆகும். எனவே $a$-ன் பரிமாணம் $m$ ($q = 1$ என்றால்) அல்லது அதன் காரணியாகும்.

குறிப்பு : மேலே கொடுத்துள்ள தேற்றங்களிலிருந்து பின்வரும் உண்மைகள் விளங்கும். (R, +, .) என்ற $e$ என்னும் அலகினையுடைய வளையத்தில்,

(i) $e$-ன் பரிமாணம் $m$ என்றால் (R, +, .)-ன் குண எண் $m$ ஆகும்.

(ii) $e$-ன் பரிமாணம் $\infty$ என்றால் (R, +, .)-ன் குண எண் 0 ஆகும்.

(iii) (R, +, .)-ன் குண எண் 0 என்றால் $e$-ன் பரிமாணம் $\infty$ ஆகும்.

**2·16. வரையறை :** (R, +, .) என்பது அலகையுடைய ஒரு வளையம் என்க. இப்பொழுது R-ல் உள்ள ஒரு மூலகத்திற்கு வலது

எதிர்மறையும் (right inverse) இடது எதிர்மறையும் (left inverse) இருந்தால் அது **அலகுக் காரணி** (unit) எனப்படும்.

(R, +, .)-ன் அலகு 1 என்க. $a$ என்னும் மூலகத்திற்கு $a'$, $a''$ ஆகியவை முறையே வலது, இடது எதிர்மறைகள் என்க. இப்பொழுது $a'' = a'' . 1 = a'' (a . a') = (a'' . a) . a' = 1 . a' = a'$. அதாவது வலது எதிர்மறையும் இடது எதிர்மறையும் ஒன்றாகவே உள்ளன. எனவே அலகுக் காரணியின் வரையறையை 'அலகை யுடைய வளையத்தின் மூலகம் ஒன்றிற்கு எதிர்மறை (இருபுற) இருந் தால் அம்மூலகம் அலகுக் காரணி எனப்படும்'', என்று கூறலாம்.

**2·17. தேற்றம் :** (R, +, .) என்ற அலகையுடைய வளையத் தின் அலகுக் காரணிகள் '.' என்ற செயலின் கீழ் ஒரு குழுவாக இருக்கும்.

**நிரூபணம் :** $a$, $b$, ஆகியவை அலகுக் காரணிகள் என்க. $a^{-1}$, $b^{-1}$ ஆகியவை முறையே $a$, $b$ ஆகியவற்றின் எதிர்மறை மூலகங்கள் என்க.

இப்பொழுது $(a . b) . (b^{-1} . a^{-1})$

$= a . (b . b^{-1}) . a^{-1}$ (சேர்ப்பு விதி)

$= a . 1 . a^{-1}$ (1 என்பது '.'-ன் கீழ் அலகு)

$= a . a^{-1}$

$= 1$

இதுபோலவே $(b^{-1} . a^{-1}) . (a . b) = 1$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

அதாவது $a . b$ என்னும் மூலகத்திற்கும் இருபுற எதிர்மறை உள்ளது. அதாவது $a$, $b$ என்பவை அலகுக் காரணிகள் என்றால் $a . b$-ம் அலகுக் காரணியாகும் என்பது விளங்கும். ... ... (1)

அலகுக் காரணிகள் அனைத்தும் வளையத்தின் மூலகங்களாகை யால் அவை '.'-ன் கீழ் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். (2)

$1 . 1 = 1 . 1 = 1$. எனவே 1 என்ற அலகும் அலகுக் காரணி யாகும். ... ... ... (3)

$a$ என்பது ஓர் அலகுக் காரணி என்றும் $a^{-1}$ என்பது அதன் எதிர்மறை என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$. இவ்வாறு ஒவ்வோர் அலகுக் காரணிக்கும் ஓர் அலகுக் காரணி எதிர்மறையாக உள்ளது. ... ... ... (4)

$(1), (2), (3), (4)$ ஆகியவற்றிலிருந்து அலகுக் காரணிகள் '.' என்னும் செயலியின் கீழ் ஒரு குழுவாகின்றன என்பது விளங்கும்.

குறிப்பு : அலகுக் காரணிகளால் ஆக்கப்படும் இக் குழு அலகுக் காரணிகளின் குழு (group of units) எனப்படும். உண்மையில் அலகுக் காரணி என்னும் கருத்தை, அடைக்கப்பட்டிருத்தல் (closure), சேர்ப்பு விதி (associative law) ஆகிய இரண்டு குணங்களுக்கும் உட்பட்டிருக்கும் எந்தக் கணித அமைப்பிலும் நாம் வரையறுக்க முடியும். இக் கணித அமைப்பு அரைக் குழு (semi group) எனப்படும். [Refer Jacobson's "Lectures in Abstract Algebra, Vol. 1.]

2·18. எ. கா : $(P(X), \triangle, \cap)$ என்னும் வளையம் $\cap$-ன் கீழ் X ஐ அலகாகக் கொண்டுள்ளது. இங்கு $X \cap X = X$. எனவே X என்பது அலகுக் காரணி ஆகும். ஆனால் $P(X)$-ல் உள்ள வேறு எந்த மூலகமும் அலகுக் காரணி அல்ல. ஆகவே $(\{X\}, \cap)$ என்னும் ஒரே ஒரு மூலகத்தைக்கொண்ட குழுவே அலகுக் காரணிகளின் குழுவாகும்.

■

2·19 எ.கா. : Q என்பது விகிதமுறு எண்களைக் குறிக்கிறது என்க. இப்பொழுது $(Q, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு 1 என்னும் எண் அலகாக உள்ளது. மேலும் '0'ஐத் தவிர வேறு எல்லா மூலகங்களுக்கும் '.'-ல் எதிர்மறை மூலகம் உள்ளது. எனவே $(Q, +, .)$-ல் அலகுக் காரணிகளின் குழு $(Q - \{0\}, .)$ என்பதாகும்.

2·20. எ. கா. : $(Z, +, .)$ என்ற வளையத்திலும் 1 என்ற அலகு உள்ளது. இங்கு $1, -1$ ஆகிய இரு மூலகங்கள் மட்டுமே அலகுக் காரணிகள் ஆகும். எனவே, இங்கு அலகுக் காரணிகளின் குழு $(\{1, -1\}, .)$ என்பதாகும்.

பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையத்திலும் இதே $(\{1, -1\}, .)$ என்ற குழுவே அலகுக் காரணிகளின் குழுவாகும்.

2·21. எ. கா. $(A, +, .)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்க. $a$ என்பது அலகுக் காரணியாக இருந்தால் $-a$ என்பதுவும் அலகுக் காரணியாக இருக்கும் என்று நிருபிக்க.

நிரூபணம் : 1 என்பது $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தின் அலகு என்க. $a, b$ என்பவை R-ன் எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்றால் $(-a) . (-b) = -[a.(-b)] = -[-(a.b)] = a.b$ என்பது குறிப்பிடத்தக்கது. ... ... ... ... $(1)$

இப்பொழுது $a$ என்பது ஓர் அலகுக் காரணி என்றும் $a^{-1}$ அதன் எதிர்மறை (. -ன் கீழ்) என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$(-a) \cdot (-a^{-1}) = a \cdot a^{-1} = 1$ (1-ன்படி)

இதுபோல் $(-a^{-1}) \cdot (-a) = a^{-1}a = 1$ (1-ன்படி)

எனவே (i) $(-a)$ என்பது அலகுக் காரணி ஆகும்.

(ii) $(-a)$-க்கு '.' -ன் கீழான எதிர்மறை மூலகம் $-a^{-1}$. அதாவது $(-a^{-1}) = -(a^{-1})$.

## பயிற்சி

1. கீழே குறிப்பிட்டுள்ள (R, +, .) என்னும் கணித அமைப்புகளில் எவை எவை வளையங்கள் என்றும் அவற்றுள் ஒவ்வொன்றிற்கும் எவை எவை உள் வளையங்கள் என்பதையும் காண்க.

| எண் | R | + | . |
|---|---|---|---|
| (i) | சிக்கல் எண்கள் (complex numbers) | கூட்டல் | பெருக்கல் |
| (ii) | $\{a + bi \mid a, b$ என்பன விகிதமுறு எண்கள்$\}$ | | ,, |
| (iii) | $\{a + bi \mid a, b$ என்பன முழு எண்கள்$\}$ | ,, | ,, |
| (iv) | மெய் எண்கள் (Real numbers) | ,, | ,, |
| (v) | விகிதமுறு எண்கள் (rationals) | ,, | ,, |
| (vi) | $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b$ என்பன முழு எண்கள்$\}$ | ,, | ,, |
| (vii) | $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b$ என்பன முழு எண்கள்$\}$ | ,, | ,, |
| (viii) | முழு எண்கள் | ,, | ,, |
| (ix) | $\{4m + 5n \mid m, n$ என்பவை முழு எண்கள்$\}$ | ,, | ,, |
| (x) | $\{8m + 10n \mid m, n$ என்பவை முழு எண்கள்$\}$ | ,, | ,, |

2. $(P, +, .)$ என்பது மெய் எண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவை (polynomials) களின் வளையம் என்க.

   $(S, +, .)$ என்பது விகிதமுறு எண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையம் என்க.

   $(T, +, .)$ என்பது முழு எண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் வளையம் என்க.

   $(R, +, .)$ என்பது $(S, +, .)$-ன் மூலகங்களில் முதல் மூன்று குணகங்கள் (அதாவது $a_0$, $a_1$ & $a_2$) பூச்சியங்களாக உள்ள பல்லுறுப்புக் கோவைகளால் ஆன கணித அமைப்பு என்க.

   இப்பொழுது $(T, +, .)$ என்பது $(S, +, .)$, $(P, +, .)$ ஆகிய இரண்டு வளையங்களுக்கும் உள்வளையம் என்றும், $(S, +, .)$ என்பது $(P, +, .)$ என்னும் வளையத்தின் உள்வளையம் என்றும் நிரூபிக்க. $(R, +, .)$ என்பது வளையமா என்றும், வளையமானால் அது எந்த வளையங்களுக்கெல்லாம் உள் வளையமாக இருக்கும் என்றும் கண்டுபிடிக்க.

3. பயிற்சி இரண்டைப் போன்ற ஒரு பயிற்சியை அணிகளால் ஆன வளையத்திற்கும் உருவாக்குக.

4. $(A, +, .)$ என்பது $(B, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உள்வளையமாகவும், $(B, +, .)$ என்பது $(C, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உள் வளையமாகவும் இருந்தால், $(A, +, .)$ என்பது $(C, +, .)$ என்னும் வளையத்தின் உள்வளையம் என்று நிரூபிக்க.

5. $(Z_6, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $(\{0, 2, 4\}, +, .)$ என்பது உள்வளையமா என்று காண்க.

6. அலகையுடைய வளையத்தின் உள்வளையம் ஒவ்வொன்றும் அலகையுடையதாக இருக்கவேண்டுமா என்பது பற்றிக் கருத்துத் தெரிவிக்க.

7. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்றும், '$a$' என்பது R-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றும் எடுத்துக்கொள்க.

$C_a = \left\{ x \middle/ \begin{matrix} x \in R \\ x \cdot a = a \cdot x \end{matrix} \right\}$ என்க.

$(C, +, \cdot)$ ஓர் உள்வளையம் என்று நிரூபிக்க.

8. $(R, +, \cdot)$ ஒரு வளையம் என்றும், $S \subseteq R$ என்றும் எடுத்துக் கொள்க.

$C(S) = \left\{ x \middle/ \begin{matrix} x \in R \\ x \cdot s = s \cdot x \quad \forall s \in S \end{matrix} \right\}$ என்றால்

$(C(S), +, \cdot)$ ஓர் உள் வளையம் என்று நிரூபிக்க.

9. $(R, +, \cdot)$ ஒரு வளையம் என்க.

$C(R) = \left\{ x \middle/ \begin{matrix} x \in R \\ x \cdot r = r \cdot x \quad \forall r \in R \end{matrix} \right\}$ என்றால்,

$(C(R), +, \cdot)$ ஓர் உள் வளையம் என்று நிரூபிக்க. இவ்வுள் வளையம் $(R, +, \cdot)$ என்ற வளையத்தின் மையம் (centre) எனப்படும். $(R, +, \cdot)$-ல் அலகு இருந்தால் அதே மூலகம் $(C(R), +, \cdot)$ லும் அலகாக இருக்கும்.

10. பயிற்சிகள் 7, 8, 9 ஆகியவற்றில் குறிப்பிட்ட ஒன்றை முதலில் நிரூபித்துவிட்டு, பின்னர் மீதியுள்ள இரண்டையும் அதிலிருந்து குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பங்களாக (particular cases) நிரூபிக்க முடியுமா? முடியுமானால் எதை முதலில் நிரூபிக்க வேண்டும்? குறிப்பிட்ட சந்தர்ப்பங்கள் எவ்வாறு இருக்கும்?

11. $(M, +, \cdot)$ என்பது மெய் எண்களால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் $2 \times 2$ அணிகளின் வளையம் என்க. $S_i$ என்பவைகளைப் பின்வருமாறு எடுத்துக் கொள்க.

$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \in R \right\}$ (R என்பது மெய் எண்களின் கணம்.)

$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \in R \right\}$

$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \text{ என்பவை விகிதமுறு எண்கள்} \right\}$

$S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \text{ என்பவை விகிதமுறு எண்கள்} \right\}$

$S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \text{ என்பவை முழு எண்கள்} \right\}$

$S_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a & o \\ b & c \end{pmatrix} \middle/ a, b, c \text{ என்பவை முழு எண்கள்} \right\}$

$$S_7 = \left\{ \begin{pmatrix} o & a \\ b & c \end{pmatrix} \Big/ \; a, b, c \text{ என்பவை மெய் எண்கள்} \right\}$$

$$S_8 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & o \end{pmatrix} \Big/ \; a, b, c \text{ என்பவை விகிதமுறு எண்கள்} \right\}$$

$$S_9 = \left\{ \begin{pmatrix} o & a \\ b & c \end{pmatrix} \Big/ \; a, b, c \text{ என்பவை முழு எண்கள்} \right\}$$

C (S) என்பதற்கு, பயிற்சி 8-ல் கொடுத்துள்ளதுபோல் பொருள் எடுத்துக்கொண்டால் C(M), $C(S_1)$, ...... $C(S_9)$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

12. பயிற்சி 11 ஐப் போன்ற பயிற்சியை விகிதமுறு எண்களால் $2 \times 2$ அணிகளுக்கு பொருந்துமாறு எழுதி நிரூபிக்கவும்.

13. பயிற்சி 11 ஐப் போன்ற பயிற்சியை முழு எண்களால் உருவாக்கப்படும் $2 \times 2$ அணிகளுக்குப் பொருந்துமாறு எழுதுக.

14. (*a*) மேலே கொடுத்துள்ள பயிற்சி 2-ல் $P_7$ என்பது முதல் 7 குணங்களும் ($a_0, a_1, \ldots\ldots \; \& \; a_6$) பூச்சியமாக இருக்கும்படியாகவும், மெய் எண்களைக் குணகங்களாகவும் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் கணம் என்க. இப்பொழுது $(P_7, +, .)$ என்பது $(P, +, .)$ ன் உள் வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(*b*) இதுபோல் $S_7$ என்பதை வரையறுத்தால் $(S_7, +, .)$ என்பது $(S, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உள்வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(*c*) இதுபோலவே $T_7$ என்பதை வரையறுத்தால் $(T_7, +, .)$ என்பது $(T, +, .)$ ன் உள்வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(*d*) $(T_7, +, .)$, $(S_7, +, .)$ ஆகியவை $(P_7, +, .)$-ன் உள் வளையங்கள் என்று நிரூபிக்க.

15. மேலே கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பயிற்சிகளில் வளையங்களாக இருப்பவைகளின் குண எண்களைக் காண்க.

16. *e* என்ற அலகையுடைய ஒரு வளையத்தில் $na = 0$ (*n* என்பது நேர்த்திசை முழுஎண்) என்பது $ne = 0$ என்

பதைக் கொடுக்கவேண்டுமா என்னும் கேள்விக்கு விடை காண்க. கொடுக்க வேண்டும் என்றால் நிரூபணமும், கொடுக்க வேண்டாம் என்றால் உதாரணமும் தருக.

17. அலகையுடைய ஒரு வளையத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகத்திற்கு இரண்டு வலது எதிர்மறை மூலகங்கள் (right inverses) இருந்தால் அதற்கு முடியா அளவு (infinite number) வலது எதிர்மறைகள் உள்ளன என்று நிரூபிக்க. (வளையத்தில் முடியும் அளவு மூலகங்களே இருந்தால் இம் முடியா அளவு எதிர்மறை மூலகங்களில் பல சமமாய் இருக்கும் என்று எண்ணிக் கொள்ளலாம்.)

18. முன் பயிற்சிகளில் வரும் வளையங்களில் அலகையுடையவற்றின் அலகுக் காரணிகளின் குழு (group of units) வைக் காண்க.

19. அலகையுடைய ஒரு வளையத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகத்திற்கு இரண்டு இடது எதிர்மறைகள் (left inverses) இருந்தால் அம் மூலகத்திற்கு முடியா அளவு இடது எதிர்மறைகள் உள்ளன என்று நிரூபிக்க.

20. ஒரு வளையத்திற்கு ஒரே ஓர் இடது அலகு (left identity) தான் உள்ளது என்றால் அது இருபுற அலகு (identity) என்று நிறுவுக.

# 3. சீர் வளையங்கள்

(Ideals)

உள் வளையங்களில் குறிப்பிட்ட சில குணங்களுக்கு உட்பட்டிருப்பவை சீர் வளையங்கள் எனப்படும்.

**3·1. வரையறை:** $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. $(S, +, .)$ அதன் உள்வளையம் என்க. $a \in R$, $s \in S \Longrightarrow a \,.\, s \in S$ என்றால் $(S, +, .)$ என்பது இடது சீர் வளையம் (left ideal) எனப்படும். $s \in S, a \in R \Longrightarrow s \cdot a \in S$ என்றால் $(S, +, .)$ என்பது வலது சீர் வளையம் (right ideal) எனப்படும். வலது சீர் வளையமாகவும் இடது சீர் வளையமாகவும் உள்ள உள் வளையம் சீர் வளையம் (ideal) எனப்படும்.

இதே வரையறையை "$aS \subseteq S \;\; \forall a \in R$ என்றால் S இடது சீர் வளையம்" என்றும் "$S_a \subseteq S \;\; \forall a \in R$ என்றால் S வலது சீர் வளையம்" என்றும் "இரண்டும் உண்மையாக இருந்தால் சீர் வளையம்" என்றும் வரையறுக்கலாம். (S உள் வளையம் என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.)

**3·2. எ. கா.:** $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $(2Z, +, .)$ என்பது சீர் வளையமாகும். ஏனெனில் $a \in Z$, $b \in 2Z$ என்று எடுத்துக்கொண்டால், $b$ என்பது இரட்டை எண்ணாக இருப்பதால் $a \,.\, b$ என்பதுவும் இரட்டை (evcn) எண்ணாக இருக்கும். எனவே $a \,.\, b \in 2Z$. இதுபோலவே $b \,.\, a \in 2Z$.

**3·3. எ. கா.:** $(Q, +, .)$ என்ற விகிதமுறு எண்களின் வளையம் $(R, +, .)$ என்ற மெய் எண்களின் வளையத்திற்கு உள் வளையமாக இருக்கும். ஆனால் இது சீர் வளையம் அல்ல. ஏனெனில் $\sqrt{2}$ என்பது மெய் எண்; 1 என்பது விகிதமுறு எண்; ஆனால் $\sqrt{2} \,.\, 1 = \sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் அல்ல.

**3·4. எ. கா. :** $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. இப்பொழுது $(\{0\}, +, .)$, $(R, +, .)$ ஆகியவை இவ்வளையத்தின் சீர் வளையங்கள் ஆகும். ஆனால் இவை முறையற்ற சீர் வளையங்கள் (improper ideals) அல்லது முக்கியத்துவமற்ற (trivial) சீர் வளையங்கள் எனப்படும்.

**3·5. தேற்றம் :** $(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்றும், $S \subseteq R$ என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $(S, +, .)$ ஒரு சீர் வளையமாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனைகள்

(i) $a, b \in S \Longrightarrow a - b \in S$

(ii) $s \in S,\ a \in R \Longrightarrow s . a \in S \ \&\ a . s \in S$ என்ற இரண்டுமாகும்.

நிரூபணம் : தேற்றம் 2 · 5 லிருந்தும், சீர் வளையத்தின் வரையறையிலிருந்தும் நிரூபிக்க.

**3·6. தேற்றம் :** $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. $a$ என்பது R-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகம் என்க. $S = \left\{ a.x \,/\, x \in R \right\}$ என்றால் $(S, +, .)$ ஒரு வலது சீர் வளையமாகும்.

நிரூபணம் : $s_1, s_2 \in S$ என்க. இப்பொழுது $s_1 = ax_1$, $s_2 = ax_2$ என்னும்படியாக $x_1, x_2 \in R$. இப்பொழுது $s_1 - s_2 = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$. இங்கு $x_1, x_2 \in R \Longrightarrow x_1 - x_2 \in R$. எனவே $a(x_1 - x_2) = s_1 - s_2 \in S$.

இவ்வாறு $s_1, s_2 \in S \Longrightarrow s_1 - s_2 \in S$.

எனவே ch II. தேற்றம் 3 · 5-ன் படி $(S, +)$ என்பது ஓர் உட்குழுவாகும். $(R, +)$ பரிமாற்றுக் குழுவாகையால் $(S, +)$-ம் பரிமாற்றுக் குழுவாகும். ... ... (1)

மேலும் $s_1 . s_2 = (ax_1) . (ax_2) = a . (x_1 ax_2) \in S$ [$x_1 ax_2 \in R$ என்பதால்]

அதாவது $s_1, s_2 \in S \Longrightarrow s_1 . s_2 \in S$ ... ... (2)

மேலும் $S \subseteq R$ என்பதால் R-ன் மூலகங்களுக்கு உண்மையாக இருக்கும்.

'.'-ன்கீழ் சேர்ப்பு விதி (associative law),

இடது பங்கீட்டு விதி,

வலது பங்கீட்டு விதி முதலியவை S-ல் உண்மையாக இருக்கும்.

எனவே (1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $(S, +, .)$ ஒரு வளையமாகும். ... ... (3)

மேலும் $s \in S, r \in R$ என்க. இப்பொழுது $s = a . x$ என்னும்படியாக $x \in R$. $\therefore s . r = (a . x) . r = a . (x . r) = a . x_1, x_1 \in R$.

$\therefore s . r \in S$.

இவ்வாறு $s \in S, r \in R \Longrightarrow s . r \in S$ ... (4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து $(S, +, .)$ என்பது ஒரு வலது சீர் வளையமாகும்.

3·7. தேற்றம்: $(R, +, )$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்றும் $a$ என்பது அதில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகம் என்றும் எடுத்துக் கொள்க. $S = \left\{ x . a \,/\, x \in R \right\}$ என்றால் $(S, +, .)$ ஓர் இடது சீர் வளையமாக இருக்கும்.

[தேற்றம் 3·6-ஐப் போலவே இதை நிரூபிக்கவும்.]

தேற்றம் 3·7-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் 1 என்னும் அலகு இருந்தால் $1 \cdot a = a$ என்பது S-ல் இருக்கும். மேலும் $a$ என்னும் மூலகத்தைக் கொண்டுள்ள இடது சீர் வளையத்தில் $x \in R$ என்றால் $x . a$ என்னும் மூலகங்களும் இருக்கும். எனவே இப்பொழுது (அதாவது $(R, +, .)$-ல் அலகு இருக்கும்பொழுது) $(S, +, .)$ என்பது $a$ என்னும் மூலகத்தைக் கொண்டுள்ள மிகச்சிறிய இடது சீர் வளையமாக இருக்கும்

$(R, +, .)$-ல் அலகு இல்லை என்று வைத்துக்கொள்வோம். இப்பொழுது $a$ என்னும் மூலகத்தைக் கொண்ட எந்த ஓர் இடது சீர் வளையத்திலும் $a + a, a + a + a, \ldots (-a), (-a)+(-a), \ldots$ ஆகிய மூலகங்கள் இருக்கும். அதாவது $na : n \in Z$ என்னும் மூலகங்கள் இருக்கும். அத்துடன், இடது சீர் வளையம் என்பதால் $x.a : x \in R$ என்னும் மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும். மேலும்

$na$, $x.a$ என்பவை இந்த இடது சீர் வளையத்தில் இருப்பதால் $\left\{ na + x.a \,/\, \begin{matrix} n \in Z \\ x \in R \end{matrix} \right\}$ என்னும் கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் அனைத்தும் $a$ ஐக் கொண்டுள்ள எந்த ஓர் இடது சீர் வளையத்திலும் இருக்க வேண்டும். ஆனால் $\left\{ na + x.a \,/\, \begin{matrix} n \in Z \\ x \in R \end{matrix} \right\}$ என்பது ஓர் இடது சீர் வளையம் என்று நிரூபிக்கலாம். (நிரூபிக்க.) எனவே $\left\{ na + x.a \,/\, \begin{matrix} n \in Z \\ x \in R \end{matrix} \right\}$ என்பது $a$ என்னும் மூலகத்தைக் கொண்டுள்ள மிகச் சிறிய இடது சீர் வளையம் ஆகும்.

**3·8. வரையறை:** $(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்க. $a$ என்ற மூலகத்தைத் தன்னுள்ளே கொண்டுள்ள மிகச் சிறிய இடது சீர் வளையம், $a$-யினால் உருவாக்கப்படும் இடது சீர் வளையம் (left ideal generated by $a$) எனப்படும். இதை $(a)_l$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

**3·9. வரையறை:** ஓர் இடது சீர் வளையத்தைத் தனிப்பட்ட ஒரு மூலகம் உருவாக்கும் என்றால் அந்த இடது சீர் வளையம் முதன்மை இடது சீர் வளையம் (Principal left ideal) எனப்படும்.

மேற்கூறிய வாதங்கள், வரையறைகள் அனைத்தும் வலது சீர் வளையங்களுக்கும் பொருந்தும்.

**3·10. வரையறை:** ஒரு வலது சீர் வளையத்தைத் தனிப்பட்ட ஒரு மூலகம் உருவாக்கும் என்றால் அது முதன்மை வலது சீர் வளையம் (Principal right ideal) எனப்படும். இவ்விதமாக $b$ என்னும் மூலகம் உருவாக்கும் வலது சீர் வளையத்தை $(b)_r$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம்.

**3·11. எ. கா.:** $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்தில் $(7)_l = (7Z, +, .) = (7)_r$ ஆகும். இதுபோலவே $(3)_l = (3Z, +, .) = (3)_r$.

**3.12. வரையறை:** ஒரு சீர் வளையத்தைத் தனிப்பட்ட ஒரு மூலகம் உருவாக்கும் என்றால் அச் சீர் வளையம் முதன்மை சீர் வளையம் (Principal ideal) எனப்படும். $b$ என்னும் மூலகத்தால் உருவாக்கப்படும் சீர் வளையம் $(b)$ என்று குறிப்பிடப்படும்.

$b$ என்பது ஏதேனும் ஒரு பரிமாற்று வளையத்தின் மூலகமாக இருந்தால் $(b)_l = (b)_r$; ஆதலால் $(b) = (\{bx / x \in R\}, +, .)$.

**3·13. வரையறை :** ஒரு வளையத்திலுள்ள ஒவ்வொரு சீர் வளையமும் முதன்மைச் சீர் வளையமாக இருந்தால் அவ்வளையம் முதன்மை வளையம் (Principal ideal ring) எனப்படும்.

**3·14. எ.கா. :** $(Z, +, .)$ என்பது முதன்மை வளையமாகும்.

[இதைத் தேற்றம் 2·15-ன் நிரூபணத்தில் உபயோகப்பட்டிருக்கும் $m = qn + r$ போன்ற கோட்பாடுகளின் உதவியால் நிரூபிக்க முயற்சிக்கவும்.]

**3·15. வரையறை :** $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. $(S, +, .)$ என்பது ஒரு சீர் வளையம் என்க. $S \subset A \subset R$ என்னும்படியாக $(A, +, .)$ என்னும் சீர் வளையம் இல்லாவிட்டால் $(S, +, .)$ என்பது உச்ச சீர் வளையம் (maximum ideal) எனப்படும். [இங்கு $\subset$ என்பது முறையான உட்கணம் (Proper subset) என்பதைக் குறிக்கிறது.]

அதாவது ஒரு சீர் வளையத்திற்கும், முழு வளையத்திற்கும் இடையில் வேறு சீர் வளையங்களே இல்லாவிட்டால் அச் சீர் வளையம் உச்ச சீர் வளையமாகும்.

**3·16. எ.கா. :** $(Z, +, .)$ என்ற வளையத்தில் $2Z$ என்பது உச்ச சீர் வளையமாகும். $(2Z, +, .)$ ஓர் உள் வளையம் என்பது முன்னால் நிரூபிக்கப்பட்டதே. மேலும், இரட்டை எண்கள் அனைத்தும் $2Z$-ல் உள்ளன. எனவே $(2Z, +, .)$ ஐ விடப் பெரிய சீர் வளையம் ஒன்று இருந்தால் அதில் ஓர் ஒற்றை (odd) எண்ணாவது இருக்கவேண்டும். ஆனால் $2Z$-ம், ஓர் ஒற்றை எண்ணும் சேர்ந்து உருவாக்கும் சீர் வளையம் $(Z, +, .)$ ஆகத்தான் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக 15 என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொண்டால், 14 என்பது $2Z$-ல் இருப்பதால் $15 - 14$ என்பது இச்சீர் வளையத்தில் உள்ளது. அதாவது 1 இந்தச் சீர் வளையத்தில் உள்ளது. எனவே $n \in Z$ என்றால் $n.1 = n$ இச் சீர் வளையத்தில் உள்ளது. அதாவது $2Z$, $\{15\}$ ஆகியவை சேர்ந்து உருவாக்கும் சீர் வளையம் $(Z, +, .)$ ஆகும்.

**3·17. எ. கா.:** (i) $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்தில் $(6Z, +, .)$ ஓர் உச்ச சீர் வளையம் அல்ல. ஏனெனில், $(3Z, +, .)$ என்னும் சீர் வளையம் $6Z \subset 3Z \subset Z$ என்னும்படியாக உள்ளது. உண்மையில் $(mZ, +, .)$ என்பது $(Z, +, .)$-ன் உச்ச சீர் வளையமாக இருக்கவேண்டுமென்றால் $m$ என்பது வகுபடா எண்ணாக (பகா எண், prime number) இருக்க வேண்டும்.

(ii) $(6\mathbb{Z}, +, .)$ என்பது $(3\mathbb{Z}, +, .)$ என்ற வளையத்தின் உச்ச சீர் வளையமாக இருக்கும்.

(iii) இதுபோல் $(6\mathbb{Z}, +, .)$ என்ற வளையத்தில் $(12\mathbb{Z}, +, .)$ என்பது உச்ச சீர் வளையமாக இருக்கும்.

குறிப்பு: மேலே நாம் வரையறுத்துள்ள Principal Maximal ideal களைத் தவிர, பரிமாற்று வளையத்தில் வரையறுக்கக்கூடிய அடிச்சீர் வளையம் (Prime ideal), அடிப்படைச் சீர் வளையம் (Primary ideal) ஆகியவைகளும் உள்ளன.

**3·18. வரையறை:** $(R, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $(R, +, .)$, $(\{0\}, +, .)$ ஆகிய இரண்டையும் தவிர வேறு சீர் வளையங்களே இல்லை என்றால் $(R, +, .)$ என்பது **தனி வளையம்** (simple ring) எனப்படும். அதாவது முறையான சீர் வளையங்களே இல்லாத வளையம் தனி வளையம் எனப்படுகிறது.

**3·19. தேற்றம்:** $(R, +, .)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்க. "$(R - \{0\}, .)$ என்பது குழுவாக இருப்பதற்குத்" தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை "$(R, +, .)$-க்கு முறையான இடது சீர் வளையங்களே (proper left ideals) இல்லை" என்பதாகும்.

**நிரூபணம்: பாகம் 1:** தேவையானது என்று நிறுவுதற்கு:

$(R - \{0\}, .)$ ஒரு குழு என்க. $(A, +, .)$ என்பது $(\{0\}, +, .)$ அல்லாத ஓர் இடது சீர்வளையம் என்க. எனவே '0' அல்லாத ஒரு மூலகமாவது A-ல் உள்ளது. அவ்வகையான மூலகங்களில் ஒன்று $a$ என்க. $(R - \{0\}, .)$ ஒரு குழுவாகையால் $a$-க்கு $a^{-1}$ என்ற எதிர்மறை உள்ளது.

இப்பொழுது $a^{-1} \in R$, $a \in A$; எனவே $(A, +, .)$ ஓர் இடது சீர் வளையம் என்பதால் $a^{-1} . a \in A$. அதாவது $1 \in A$. (1 என்பது $(R, +, .)$ல் உள்ள அலகு என்றால்)

இப்பொழுது $x \in R$ என்க. $1 \in A$ என்பதால் $x.1 = x \in A$ (இது சீர் வளையத்தின் குணத்தின்படி). இவ்வாறு R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் A-ல் உள்ளது. மேலும் $A \subseteq R$ என்பதால் $A = R$. அதாவது $(\{0\}, +, .)$ அல்லாத ஓர் இடது சீர் வளையம் $(R, +, .)$ +க்கு உள்ளது என்றால் அது $(R, +, .)$ ஆகத்தான் இருக்க வேண்டும். அதாவது $(R, +, .)$-க்கு முறையான இடது சீர் வளையங்களே இல்லை.

பாகம் 2 : போதுமானது என்று காட்ட :

(R, + , . )-க்கு முறையான இடது சீர் வளையங்களே இல்லை என்க.

R-ன் மூலகங்களுக்குச் சேர்ப்பு விதி உண்மையாக இருப்பதால், (R − $\{0\}$, . )-ன் மூலகங்களுக்கும் சேர்ப்பு விதி உண்மையாக இருக்கும். ... ... ... ... (1)

(R, + , . ) என்பது அலகையுடைய வளையம் என்பதால் அதே அலகு (R − $\{0\}$ , . ) லும் அலகாக இருக்கும். இதையே நாம் R—$\{0\}$-ல் இடது அலகு (left identity) உள்ளது எனலாம் (2)

$b$ என்பது R — $\{0\}$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. இப்பொழுது $b \neq 0$ என்பதாலும் (R, +, .)-க்கு முறையான இடது சீர் வளையங்கள் இல்லை என்பதாலும் $b$-ஆல் உருவாக்கப்படும் $(b)_1$ என்ற இடது சீர் வளையம் (R, +, .) ஆக இருக்கும். 1 என்பது R-ல் உள்ளதால் $1 \in (b)_1$ ... ... ... ...(3)
ஆனால் $(b)_1$ன் மூலகங்கள் $x.b \,/\, x \in R$ என்பவையாகும்.

எனவே, (3) லிருந்து $1 = x.b$ என்னும்படியாக $x$ என்ற மூலகம் R-ல் உள்ளது. இங்கு $0.b = 0$ என்பதால் $x \neq 0$. இவ்வாறு R—$\{0\}$-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும் இடது எதிர்மறை (left inverse) R — $\{0\}$–ல் உள்ளது. ... ... ... ... (4)

R—$\{0\}$ என்ற கணம் ' . ' என்ற செயலியின் கீழ் அடைக்கப் பட்டுள்ளது என்பதைப் பின்வருமாறு காட்டலாம். $a, b$ என்பவை R − $\{0\}$-ன் எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க. $a^{-1}$, $b^{-1}$ ஆகியவை முறையே $a, b$ ஆகியவற்றின் இடது எதிர்மறைகள் என்க. இப்பொழுது $(b^{-1}.a^{-1}).(a.b) = b^{-1}.(a^{-1}.a).b = b^{-1}.1.b$ $= b^{-1}\ b = 1$. அதாவது $(b^{-1}.a^{-1}).(a.b) \neq 0$ ... ... (5)

$x\ 0 \quad 0\ \forall\, x \in R$ என்பதால் $a.b = 0 \Longrightarrow (b^{-1}.a^{-1}).(a.b)$
$= 0.$ ... (6)
(5), (6) ஆகியவற்றிலிருந்து $a\,b \neq 0$.

அதாவது $a, b \in R - \{0\} \Longrightarrow a.b \in R - \{0\}$ ... (7)
(7), (1), (2), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து (R − $\{0\}$, . ) ஒரு குழு வாகும்.

குறிப்பு : (R, +, .) என்ற வளையத்தில் (R—$\{0\}$, . ) என்பது குழுவாக இருந்தால் (R, + , . ) ஒரு கோட்டக் களம் (Skew field)

division ring) என்றும், $(R - \{0\}, .)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாக இருந்தால் $(R, +, .)$ ஒரு களம் (field) என்றும் சொல்லப்படும். ஒவ்வொரு சீர் வளையமும் இடது சீர் வளையமாக இருப்பதால் முன் தேற்றப்படி கோட்டக் களத்திற்கு முறையான சீர் வளையங்கள் இல்லை என்பது விளங்கும். அதாவது ஒவ்வொரு கோட்டக் களமும் (skew field) தனி வளையம் (simple ring) ஆகும்.

**3·20. தேற்றம் :** $(R, +, .)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்க. $(R, +, .)$ ஒரு கோட்டக் களமாக இருப்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை $(R, +, .)$-க்கு முறையான வலது சீர் வளையங்களே இல்லை என்பதாகும். [தேற்றம் 3·19 ஐப் போல் நிரூபிக்கவும்.]

**3·21. தேற்றம் :** $(R, +, .)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்க. '$(R, +, .)$-க்கு முறையான இடது சீர் வளையங்கள் இல்லை' என்பதற்குத் தேவையானதும் போதுமானதுமாகிய நிபந்தனை '$(R, +, .)$-க்கு முறையான வலது சீர் வளையங்களே இல்லை' என்பதாகும். [இதை முன் இரு தேற்றங்களையும் உபயோகித்து நிரூபிக்க.

### பயிற்சி

1. முந்தைய பயிற்சித் தொகுப்பில் (அத். III Sec. 2) கொடுக்கப்பட்டுள்ள பயிற்சி 1-ல் $(R, +, .)$ என்னும் கணித அமைப்புகளில் வளையமாக இருப்பவைகளுக்குச் சீர் வளையங்கள் இருந்தால் அவற்றைக் காண்க.

2. முந்தைய பயிற்சித் தொகுப்பில், பயிற்சிகள் 2, 14 ஆகியவற்றில் உள்ள

   (a) $(T, +, .)$, $(S, +, .)$ ஆகியவை $(P, +, .)$-ன் சீர் வளையங்களாக இருக்குமா என்பதைக் காண்க.

   (b) $(T_7, +, .)$, $(S_7, +, .)$, $(P_7, +, .)$ ஆகியவை, முறையே $(T, +, .)$, $(S, +, .)$, $(P, +, .)$ ஆகியவற்றின் சீர் வளையங்கள் என்பதை நிரூபிக்க. 7 ஐ மாற்றிவிட்டு வேறு எந்த முழு எண்ணைப் போட்டால் இது மறுபடியும் உண்மையாக இருக்கும் என்பதைக் காண்க.

3. முந்தைய பயிற்சித் தொகுப்பில் பயிற்சி 8-ல் கிடைத்திருக்கும் $(C(S), +, .)$ என்பது $(R, +, .)$-ன் சீர் வளையமாக

இருக்க வேண்டுமா என்பது பற்றியும், (C (S), +, .) ஒரு சீர் வளையமாக இருக்க வேண்டுமானால் S-க்கு எந்தப் பெறுமானம் (மதிப்பு, value) கொடுக்க வேண்டும் என்பது பற்றியும் விமரிசனம் எழுதுக.

4. (a) முந்தைய பயிற்சித் தொகுப்பில் பயிற்சி 11-ல்

$$C(S_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \Big/ x \text{ என்பது மெய் எண்} \right\} \text{ என்று}$$

கிடைக்கும். இங்கு $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C(S_1)$; மேலும் $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\in M$ ஆனால் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin C(S_1)$.

எனவே (C (S₁), + , .) ஒரு சீர் வளையம் அல்ல என்பது விளங்கும்.

(b) இதுபோலவே $C(M) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \Big/ x \text{ என்பது மெய் எண்} \right\}$ என்று கிடைக்கும். இங்கும் 4(a) ஐப் போலவே (C(M), + , .) ஒரு சீர் வளையம் அல்ல என்று நிறுவலாம். ஆனால் (C (S) , + , .) என்பது சீர் வளையமாக இருக்கும்படி S என்ற உட்கணம் ஒவ்வொரு வளையத்திலும் உள்ளது. அந்த உட்கணம் எது என்று காண்க.

குறிப்பு: ஒவ்வொரு வளையமும் தனக்குத்தானே சீர் வளையம் ஆகும்.

5. (R, + , .) என்பது 1 என்ற அலகினையுடைய வளையம் எனக. இப்பொழுது 1 என்னும் மூலகத்தையுடைய ஒவ்வொரு சீர் வளையமும் (R, + , .) என்று நிரூபிக்க.

6. (R , + , .) என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க, $n$ என்பது குறிப்பிட்ட ஒரு முழு எண் (மிகை) என்க. $S = \left\{ nx \Big/ x \in R \right\}$ என்றால் (S, +, .) ஒரு சீர் வளையம் என்று நிரூபிக்க. (உதாரணமாக $\left\{ 5x \Big/ \quad \right\}$ ஒரு சீர் வளையமாக இருக்கும்.)

7. (R , + , .) ஒரு வளையம் என்க.

$S = \left\{ \;\; / \begin{matrix} nx = 0 \text{ என்னும் படியாக } n \text{ என்ற} \\ \text{ஒரு நேர்த்திசை முழு எண் உள்ளது} \end{matrix} \right\}$ என்றால் $(S, +, .)$ ஒரு சீர் வளையம் என்று நிரூபிக்க. அதாவது முடியும் பரிமாணத்தை (order) உடைய மூலகங்கள் ஒரு சீர் வளையமாகின்றன.)

8. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. $S = \left\{ x \,/\, 9x = 0 \right\}$ என்றால் $(S, +, .)$ ஒரு சீர் வளையம் என்று நிரூபிக்க.

9. பயிற்சி 8ஐப் பொதுப்படையாக்கி பயிற்சி 6ஐப் போல் '$n$' ஐ உபயோகித்து எழுதுக.

10. இரண்டு சீர் வளையங்களின் வெட்டு மீண்டும் சீர் வளையமாக இருக்குமா என்பதை ஆராய்க. இரண்டு சீர் வளையங்களின் இணைப்பு (union) சீர் வளையமாக இருக்கவேண்டியதில்லை என்பதற்கு எடுத்துக் காட்டு தருக.

11. இரண்டு வலது சீர் வளையங்களின் வெட்டு (intersection) மீண்டும் வலது சீர் வளையமாக இருக்குமா என்பதை ஆராய்க.

12. $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்தில் $(7Z, +, .)$ என்பது உச்ச சீர் வளையம் என்று காட்டுக.

13. $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் U, V ஆகியவை சீர் வளையங்கள் என்க.

$M = \left\{ u+v \,/\, \begin{matrix} u \in U \\ v \in V \end{matrix} \right\}$ என்றால் $(M, +, .)$ ஒரு சீர் வளையம் என்று நிரூபிக்க. [இது U, V ஆகிய இரு சீர் வளையங்களின் கூட்டல் (sum) எனப்படும். இதை $U + V$ என்று குறிப்பிடுவதுண்டு.]

14. (a) $(R, +, .)$ என்பது அலகையுடைய பரிமாற்று வளையம் என்க. $a, b$ என்பவை R-ல் உள்ள இரு குறிப்பிட்ட மூலகங்கள் என்க. $U = \left\{ xa + yb \,/\, x, y \in R \right\}$ என்றால் $(U, +, .)$, $a, b$ ஆகிய இரு மூலகங்களையும் தன்னகத்தே கொண்ட சீர் வளையம் என்று காட்டுக.

(b) $a. b$ ஆகிய இரு மூலகங்களும் ஏதேனும் ஒரு சீர் வளையத்தில் இருந்தால் U-ன் மூலகங்கள் அனைத்தும் அச் சீர் வளையத்தில் இருக்கும் என்று நிறுவுக.

15. (a) (R , + , .) என்பது அலகையுடைய வளையம் என்க. (R − {0} , .) குழுவாக இருந்தால் (R , + , .)-க்கு முறையான சீர் வளையங்கள் இல்லை என்று நிறுவுக. [இதை உபயோகித்து ஒரு கோட்டக் களத்தின் புனல் சார்புப் பிம்பம் (அடுத்த பிரிவில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது) {0} ஆகவோ அல்லது R ஆகவோதான் இருக்க முடியும் என்று நிறுவலாம் ]

    (b) 15 (a)-ல் (R, + , .)-க்கு முறையான சீர் வளையங்கள் இல்லை என்றால் (R − {0} , .) ஒரு குழுவாக இருக்குமா என்பது பற்றி விமரிசனம் எழுதுக.

16. (R , + , .) என்பது கோட்டக் களமாக (skew field) இருந்தால் “$a . b = 0 \implies a = 0$ அல்லது $b = 0$” என்று நிரூபிக்க

17. ஒவ்வொரு களமும் தனி வளையம் (single ring) என்று நிரூபிக்க.

18. ஒரு பரிமாற்று வளையத்தில் ஒவ்வோர் இடது சீர் வளையமும் வலது சீர் வளையமாக இருக்கும். இதன் எதிர் மறை (converse) உண்மையா என்பதை ஆய்க.

19. ஒரு வளையத்திற்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட உச்ச சீர் வளையங்கள் (maximal ideals) இருக்க முடியுமா என்பதை ஆய்க. (முடியும் என்றால் எடுத்துக்காட்டும், முடியாது என்றால் நிரூபணமும் கொடுக்க வேண்டும்.)

# 4. வளையங்களுக்கான புனல் சார்புகளும் ஓரினச் சார்புகளும்

**(Ring homomorphisms and Isomorphisms)**

4·1. வரையறை : $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus, \odot)$ என்பவை இரண்டு வளையங்கள் என்க. $R_1$ லிருந்து $R_2$-க்கு $a \longrightarrow f(a)$ என்று வரையறுக்கப்படும் $f$ என்ற சார்பு

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \qquad \forall\, a, b \in R$$
$$f(a \,.\, b) = f(a) \odot f(b) \qquad \forall\, a, b \in R$$

என்னும் இரண்டு விதிகளுக்கும் உட்பட்டிருந்தால் அது புனல் சார்பு (homomorphism) எனப்படும். ஒரு புனல் சார்பு ஒன்றுக்கொன்றான தாக இருந்தால் அது ஓரினச் சார்பு (isomorphism) எனப்படும். $(R_1, +, .)$, $(R_2, \oplus, \odot)$ ஆகிய வளையங்களுக்கிடையில் முழு ஓரினச் சார்பு (onto isomorphism) ஒன்றை வரையறுக்க முடியுமானால் இந்த இரண்டு வளையங்களும் அமைப்பில் ஒன்றானவை (isomorphic) எனப்படும். இதை $(R_1, +, .) \cong (R_2, \oplus, .)$ என்று குறிப்பிடுதல் வழக்கம். ஒரு வளையத்திலிருந்து அதற்குத் தானே வரையறுக்கப்பட்டுள்ள முழு ஓரினச் சார்பு, தன் ஓரினச் சார்பு (automorphism) எனப்படும்.

4·2. எ.கா. : $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்திலிருந்து $(Z_4, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $f(x) = x$ ஐ 4ஆல் வகுக்கும் பொழுது கிடைக்கும் மீதி என்று ஒரு சார்பை வரையறுக்க. இப்பொழுது $f$ என்பது $(Z, +, .)$ லிருந்து $(Z_4, +, .)$-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட முழுப் புனல் சார்பாக (onto homomorphism) இருக்கும்.

4·3. எ.கா. : $(Z, +, .)$ என்னும் வளையத்திலிருந்து $(2Z, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $f(a) = 2a$ என்று வரையறுக்கப்படும் சார்பானது ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பாக இருக்கும்.

மேலும் $f(a+b) = 2(a+b) = 2a+2b = f(a)+f(b)$

ஆனால் $f(a \cdot b) = 2(a \cdot b) = 2a \cdot b \neq f(a) \cdot f(b)$

அதாவது '.' ன்கீழ் $f$, செயலைப் பாதுகாக்கவில்லை. எனவே இது புனல் சார்பு அல்ல.

4·4. தேற்றம் : $(A, +, \cdot)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகியவை இரண்டு வளையங்கள் என்க. $f: A \longrightarrow B$ என்பது புனல் சார்பு என்றால் $(f(A), \oplus, \odot)$ என்பது $(B, \quad, \odot)$-ன் உள் வளையமாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : $f(A) \subseteq B$ என்பது தெளிவு.

$(A, +)$ என்பது குழுவாகையால் $(f(A), \oplus)$ என்பது $(B, \oplus)$ உட்குழுவாக இருக்கும். ... ... ... (1)

(குழுக்களுக்கான புனல் சார்புகளைப்பற்றிய தேற்றப்படி.)

மேலும் $f(a), f(b) \in f(A)$ என்க.

இப்பொழுது $f(a) \odot f(b) = f(a \cdot b)$ ($f$, புனல் சார்பு)

ஆனால், $f(a \cdot b) \in f(A)$ $[\because a \cdot b \in A]$

அதாவது $f(a), f(b) \in f(A) \Longrightarrow f(a) \odot f(b) \in f(A)$

இவ்வாறு $f(A)$ என்ற கணம் $\odot$ என்ற செயலியின் கீழ் அடைக்கப்பட்டுள்ளது. ... ... ... ...(2)

மேலும் $\odot$-க்கான சேர்ப்பு விதி, பங்கீட்டு விதிகள் ஆகியவைB-ல் உண்மையாக இருப்பதால் $f(A)$லும் உண்மையாக இருக்கும்...(3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $(f(A), \oplus, \odot)$ ஒரு வளையமாகும்.

குறிப்பு : $(f(A), \oplus, \odot)$ என்பது $(A, +, \cdot)$-ன் புனல் சார்புப் பிம்பம் (homomorphic image) எனப்படும்.

4·5. தேற்றம் : $(A, +, \cdot)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகியவை இரு வளையங்கள் என்க. $f: A \rightarrow B$ ஒரு புனல் சார்பு என்க. $0, 0'$ ஆகியவை முறையே $(A, +)$, $(B, \oplus)$ ஆகியவற்றின் அலகுகள் என்றால் $f(0) = 0'$ ; $f(-a) = -f(a) \quad \forall\, a \in A$.

[ — அடையாளம், $+$, $\oplus$ ஆகியவற்றின் கீழான எதிர்மறைகளைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.]

நிரூபணம் : $(f(A), \oplus, \odot)$ என்பது $(B, \oplus, \odot)$-ன் உள் வளையம் என்பதால் $0'$ என்ற $(B, \oplus)$-ன் அலகு $(f(A), \oplus)$-ன் அலகாகவும் இருக்கும். ... ... ... ... (1)

$f(b)$ என்பது $f(A)$-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இப்பொழுது $f(b) \oplus f(0) = f(b+0) = f(b)$

$$f(0) \oplus f(b) = f(0+b) = f(b)$$

($f$ என்பது புனல் சார்பு. $0$ என்பது $(A, +)$ ன் அலகு.)

அதாவது $f(b) \oplus f(0) = f(0) \oplus f(b) = f(b)$

$$\forall f(b) \in f(A)$$

எனவே $f(0)$ என்பது $(f(A), \oplus)$-ன் அலகாக உள்ளது...(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து, ஒரு குழுவுக்கு இரண்டு அலகுகள் இருக்க முடியாதாகையால் $f(0) = 0'$ ... (3)

$a$ என்பது A-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க.

இப்பொழுது $f[a + (-a)] = f(a) \oplus f(-a)$

($f$, புனல் சார்பு)

அதாவது $f(0) = f(a) \oplus f(-a)$

அதாவது $0' = f(a) \oplus f(-a)$ [ (3)-லிருந்து]

இதுபோலவே $0' = f(-a) \oplus f(a)$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

எனவே $f(a)$ என்பதன் எதிர்மறை மூலகம் $f(-a)$ ;

அதாவது $f(-a) = -f(a) \quad \forall a \in A$ ... (4)

(3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து தேற்றம் நிரூபிக்கப்பட்டது.

**4·6. தேற்றம் :** $(A, +, .)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகியவை இரு வளையங்கள் என்க. $f : A \longrightarrow B$ என்பது ஒரு புனல் சார்பு என்க. $0'$ என்பது $(B, \oplus)$-ன் அலகு என்க. இப்பொழுது $0'$-ன் மூல பிம்பங்கள் (pre images) சேர்ந்து $(A, +, .)$-ன் ஒரு சீர் வளையமாக இருக்கும். ($0'$-ன் மூல பிம்பங்களால் ஆன கணம் அலகுக் கற்றை எனப்படும்.)

நிரூபணம் : $K = \left\{ x \middle/ \begin{matrix} x \in A \\ f(x) = 0' \end{matrix} \right\}$ என்க.

இப்பொழுது $a \in K$, $b \in K \Longrightarrow f(a) = 0'$, $f(b) = 0'$.

$$f(a - b) = f(a + (-b))$$
$$= f(a) \oplus f(-b)$$
$$= f(a) - f(b)$$
$$= 0' - 0' = 0'.$$

$\therefore \; a - b \in K$

இவ்வாறு $a, b \in K \Longrightarrow a - b \in K$ ... ... (1)

மேலும் $a \in A$, $k \in K$ என்க. இப்பொழுது $f(k) = 0'$.

$\therefore \; f(a.k) = f(a) \odot f(k)$ ($f$, புனல் சார்பு)

$= f(a) \odot 0' = 0'.$ ($x.0' = 0' \; \forall x \in B$)

$\therefore \; a.k \in K$ ... ... ... ... (2)

இதுபோல் $k.a \in K$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

இவ்வாறு $a \in A$, $k \in K \Longrightarrow a.k \in K \;\&\; k.a \in K$ ... (3)

(1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து தேற்றம் 3·5-ன் படி $(K, +, .)$ ஒரு சீர் வளையமாகும்.

ஒவ்வோர் ஓரினச் சார்பும் புனல் சார்பாக இருப்பதால் புனல் சார்புகளுக்கான தேற்றங்கள் அனைத்தும் ஓரினச் சார்புகளுக்கும் பொருந்தும். இவ்வாறாக தேற்றங்கள் 4·7, 4·8 ஆகியவை கிடைக்கும்.

**4·7. தேற்றம் :** $(A, +, .)$; $(B, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரண்டும் வளையங்கள் என்றும், $f : A \longrightarrow B$ என்பது ஓரினச் சார்பு என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $0, 0'$ என்பவை முறையே $(A, +)$, $(B, \oplus)$ ஆகியவற்றின் அலகுகள் என்றால் $f(0) = 0'$; $f(-a) = -f(a)$ $\forall \; a \in A$.

**4·8. தேற்றம் :** $(A, +, .)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரண்டும் வளையங்கள் என்றும், $f : A \rightarrow B$ என்பது ஓரினச் சார்பு என்றும் எடுத்துக்கொண்டால் $(f(A), \oplus, \odot)$ என்பது, $(B, \oplus, \odot)$-ன் உள் வளையமாக இருக்கும்.

**4·9. தேற்றம் :** $f : A \longrightarrow B$ என்பது $(A, +, .)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகிய வளையங்களுக்கிடையில் உள்ள முழு ஓரினச் சார்பு என்றால் $f^{-1} : B \longrightarrow A$ என்பதுவும் முழு ஓரினச் சார்பாக இருக்கும். [இதை நிரூபிக்கவும்.]

**4·10. தேற்றம் :** $(A, +, .) \cong (B, \oplus, \odot)$ & $(B, \oplus, \odot) \cong (C, \#, 0) \Longrightarrow (A, +, .) \cong (C, \#, 0)$. [இத்தேற்றத்தையும் குழுக்களுக்கான தேற்றத்தைப்போல் நிரூபிக்கவும்.]

பயிற்சி

1. ஒரு பரிமாற்று வளையத்தின் ஓரினச் சார்புப் பிம்பம் (isomorphic image) பரிமாற்று வளையமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

2. ஒரு பரிமாற்று வளையத்தின் புனல் சார்புப் பிம்பம் பரிமாற்று வளையமாக இருக்குமா என்பதைக் காண்.

3. $f$ என்பது $(R, +, .)$ என்னும் வளையத்திலிருந்து $(R, +, .)$-க்கு வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் புனல் சார்பு என்க. $F = \left\{ x \Big/ \begin{matrix} x \in R \\ f(x) = x \end{matrix} \right\}$ என்றால் $(F, +, .)$ ஓர் உள் வளையம் என்று நிரூபிக்க.

4. $a + bi \longrightarrow a - bi$ என்பது சிக்கல் எண்களின் (complex numbers) வளையத்தில் ஒரு தன் ஓரினச் சார்பு என்று நிறுவுக.

5. $a + bi \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ என்னும் சார்பு, சிக்கல் எண்களின் வளையத்திலிருந்து $2 \times 2$ அணிகளின் வளையத்திற்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள ஓரினச்சார்பு என்று நிரூபிக்க.

6. $(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்க. $(M, +, .)$ என்பது R-ன் மூலகங்களால் நிரப்பப்பட்டிருக்கும் $2 \times 2$ மூலைவிட்ட அணி (diagonal matrix)களின் வளையம் என்க.

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \longrightarrow a$ என்பது $(M, +, .)$ விருந்து R-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள புனல் சார்பு என்று நிறுவுக.

7. $(R, +, .)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு வளையம் என்க. F என்பது $\{ a \}$ என்னும் கணத்திலிருந்து R-க்கு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்புகளின் கணம் என்க. $f, g \in F$ என்க. F-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் + , '.' என்னும் செயலிகளை, $(f + g)\,x = f(x) + g(x)$; $(f.g)x = f(x).g(x)$ என்று வரையறை செய்தால் $(F, +, .)$ ஒரு வளையம் என்றும், $(R, +, .) \cong (F, +, .)$ என்றும் நிறுவுக.

8. வளையங்களை மூலகங்களாகக் கொண்ட கணிதத்தில் $R_1 \cong R_2 \Longleftrightarrow$ "$R_1$ லிருந்து $R_2$-க்கு முழு ஓரினச் சார்பு உள்ளது" என்று வரையறுத்தால் $\cong$ என்பது சரிநிகர் தொடர்பு (equivalence relation) என்று நிறுவுக.

9. $f : (R_1, +, .) \longrightarrow (R_2, \oplus, \odot)$ என்பது ஒரு புனல் சார்பு என்க. $f(a.(b+c)) = f(a) \odot f(b) \oplus f(a) \odot f(c) \quad \forall\, a, b, c \in R_1$ என்று நிறுவுக.

10. $(A, +, .)$, $(B, \oplus \odot)$ என்பவை அலகையுடைய இரு வளையங்கள் என்க. $f : A \longrightarrow B$ ஒரு புனல் சார்பு என்றால் $f(1)$ என்பது $(B, \oplus, \odot)$-ன் அலகாக இருக்கவேண்டியதில்லை என்று நிறுவுக. இங்கு $f$ முழுப் புனல் சார்பாக இருந்தால் $f(1)$ என்பது $(B, \oplus, \odot)$-ன் அலகுதான் என்று நிறுவுக.

11. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்றும், $(A, \oplus, \odot)$ ஒரு கணித அமைப்பு என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $f : R \longrightarrow A$ என்பது $f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$, $f(x . y) = f(x) \odot f(y)$ என்னும் விதிகளுக்கு உட்பட்டுள்ள ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்றால், $(A, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்கவும்.

12. (*a*) (பயிற்சி 11-ன் மறுதலை) : $(R, +, .)$ ஒரு கணித அமைப்பு என்றும், $(A, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $f : R \longrightarrow A$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பின் கீழ் $+$, $.$ ஆகியவை $a + b = f^{-1}[f(a) \oplus f(b)]$, $a.b = f^{-1}[f(a) \odot f(b)]$ என்னும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் $(R, +, .)$ என்பது $(A, \oplus, \odot)$ உடன் அமைப்பில் ஒன்றான வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(*b*) $(B, +, .)$ என்பது $e$ என்ற அலகையுடைய வளையமாக இருந்தால் $a \oplus b = a + b - e$, $a \odot b = a + b - ab$ என்று வரையறுக்கப்பட்டுள்ள $\oplus$, $\odot$ ஆகிய செயலிகளின் கீழ் $(B, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையமாக இருக்கும் என்று (பயிற்சி 12 (*a*)ஐ உபயோகித்து) நிரூபிக்க.

(*c*) 12 (*b*)-ல் $\oplus$, $\odot$ ஆகியவற்றை $a \oplus b = e + a + b$, $a \odot b = a + b + ab$ என்று வரையறுத்தால் $(B, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(*d*) $(B, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. $p$ என்பது B-ல் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட மூலகம் என்க. $f(a) = p+a$ என்று வரையறுத்தால், $f: B \longrightarrow B$ ஒன்றுக்கொன்றான முழுச் சார்பு என்று நிறுவுக. எனவே, 12 (*a*)-ன் படி B-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை $(B, \oplus, \odot)$ வளையமாக இருக்குமாறு வரையறுக்க முடியும். இச் செயலிகளை வரையறுத்து $(B, \oplus, \odot)$ வளையமா என்பதைச் சரி பார்க்க.

(*e*) 12 (*a*)-ல் $(A, \oplus, \odot)$ என்பது அலகையுடைய வளையம் என்றால், $(R +, .)$ என்பதுவும் அலகையுடைய வளையமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

(*f*) 12 (*b*)ஐக் கவனித்தால் $(B, \oplus, \odot)$ என்ற வளையத்தில் $e$ என்பது $(B, \oplus)$-ன் அலகாகவும் '$o$' என்ற $(B, +)$-ன் அலகு $\odot$-ன் கீழ் அலகாகவும் உள்ளது. இதிலிருந்து பின்வரும் உண்மைகள் நமக்குப் புலப்படும். "$(R, +, .)$ ஒரு வளையமாக இருந்தால் R-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை (i) $(R, \oplus, \odot)$ அலகையுடைய ஒரு வளையம், (ii) $+$-ன் அலகு $\odot$-ன் அலகு, (iii) '$.$'-ன் அலகு $\oplus$-ன் அலகு என்னும் மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டு வரையறுக்க முடியும்." இதற்கு முறையான நிரூபணம் கொடுக்கவும்.

(*g*) 12(*b*) யிலுள்ள $(B, +, .)$, $(B, \oplus, \odot)$ ஆகிய இரு வளையங்களும் அமைப்பில் ஒன்றுயிருக்குமா (isomorphic) என்பதைக் காண்க. $(B, \oplus, \odot)$ விருந்து $(B, +, .)$-க்கு $f(a) = e - a$ என்ற சார்பைப் பரிசீலனைக்கு எடுத்துக் கொள்க. இதிலிருந்து "ஒரே கணத்தின் மீது ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட வெவ்வேறான வளையங்களை வரையறுக்க முடியும்" என்பதுவும், "அவ்வளையங்கள் அமைப்பில் ஒன்றானவையாகவும் (isomorphic) இருக்கலாம்" என்பதுவும் புலப்படும்.

13. $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் $(M, +, .)$ என்பது ஒரு சீர் வளையம் (ideal) என்க. $(R, +)$ ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகையால் $(M, +) \lhd (R, +)$. $M^* = \left\{ M+a \,/\, a \in R \right\}$ என்பது $(M, +)$-ன் வலது உப கணங்களால் (right cose's)

ஆன கணம் என்க. A, B $\in$ M* என்க. இப்பொழுது M*-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் $\oplus$ என்னும் செயலியை

$$A \oplus B = \left\{ a+b \,/\, a \in A, b \in B \right\}$$ என்று வரை யறுத்தால் (M*, $\oplus$ ) ஒரு குழு என்பது தெரிந்ததே. [ஈவுக் குழு, II, 7. 20]. இப்பொழுது M*-ன் மூலகங்களுக்கிடையில் $\odot$ என்னும் செயலியை

$$A \odot B = \left\{ a.b \,/\, a \in A, b \in B, \right\}$$ என்று வரையறுத்தால் $(M_{+a}) \odot (M_{+b}) = M_{+(a+b)}$ என்றும் (M*, $\oplus$, $\odot$) ஒரு வளையம் என்றும் நிரூபிக்க இவ்வளையம் ஈவு வளையம் (quotient ring) எனப்படும்.

பகுதி IV

# எண் அரங்கம்

**(Integral Domain)**

முகவுரை

முழு எண்களின் கணம் +-ன் கீழ் குழுவாக இருந்தது. மேலும் முழு எண்களின் கணம் +, . ஆகிய இரு செயலிகளின் கீழும் வளையமாக இருந்தது. அதாவது நாம் படிக்கும் கணித அமைப்புகள் மேலும் மேலும் பல விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன என்று எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் நாம் முழு எண்களின் அண்மையில் வந்து கொண்டிருக்கிறோம். முழு எண்களைப் பொறுத்தவரையில் $a.b \neq 0$ என்றால் $a = 0$ அல்லது $b = 0$ என்றுதான் இருக்க வேண்டும். இதையே எண் அரங்கத்தின் குணமாக நாம் எடுத்துக் கொள்வோம்.

## 1. வரையறையும் குணங்களும்

**(Definition and properties)**

$(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்க. இதில் நாம் எடுத்துக் கொண்ட '.' என்ற செயலி (i) R-ல் அடைக்கப்பட்டிருக்கும். (ii) சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருக்கும். இப்பொழுது '.' என்னும் செயலி மேலும் மேலும் பல நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டிருக்கிறது என்று எடுத்துக்கொண்டால் நாம் பல வகையான வளையங்களைப் பெறலாம். இவற்றுள் ஒன்று தான் எண் அரங்கமாகும்.

**1·1. வரையறை :** $(R, +, .)$ என்னுள் வளையத்தில் "$a.b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0$" என்றால் $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கம் (Integral Domain) எனப்படும்.

ஓர் எண் அரங்கமானது பரிமாற்று வளையமாக இருந்தால் அது பரிமாற்று எண் அரங்கம் (Commutative integral domain) என்றும்,

'.'-ன் கீழ் அலகு ஒன்று இருந்தால் அது அலகையுடைய எண் அரங்கம் (Integral domain with identity) என்றும் சொல்லப்படும். மேலும் ஒரு பரிமாற்று எண் அரங்கத்தில் அலகு இருந்தால் அது "அலகையுடைய பரிமாற்று எண் அரங்கம்" (Commutative integral domain with identity) எனப்படும்.

1·2. எ.கா.: $(Z, +, .)$ என்பது அலகையுடைய பரிமாற்று எண் அரங்கமாகும். ஏனெனில், $(Z, +, .)$ என்பது பரிமாற்று வளையம் என்பது நமக்குத் தெரியும். மேலும் 1 என்ற அலகும் உள்ளது. அத்துடன் $a.b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0$ என்னும் விதியும் உண்மையாக உள்ளது.

1·3. எ. கா.: $(Z_4, +, .)$ ஒரு வளையம். ஆனால் எண் அரங்கம் அல்ல. காரணம், $Z_4$-ல் $2.2 = 0$; ஆனால் $2 \neq 0$, $2 \neq 0$.

1·4. எ. கா.: X என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மூலகங்களைக் கொண்ட கணம் என்றால் $(P(X), \triangle, \cap)$ ஓர் எண் அரங்கம் அல்ல. ஏனெனில், $a$, $b$ என்பவை X-ன் வெவ்வேறான இரு மூலகங்கள் என்றால் $\{a\} \cap \{b\} = \phi$; ஆனால் $\{a\} \neq \phi \neq \{b\}$. ($\phi$ என்பது $\triangle$-ன் கீழ் அலகு.)

1·5. எ.கா.: $2 \times 2$ அணிகளினால் ஆன வளையமும் எண் அரங்கம் அல்ல. ஏனெனில், $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; ஆனால் $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. இங்கு $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்பது அணிகளின் கூட்டலுக்கான அலகாகும்.

1·6. வரையறை: $a$ என்பது $(R, +, .)$ என்னும் வளையத்திலுள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $a . b = 0$ என்னும்படியாக $b \neq 0$ என்னும் மூலகம் R-ல் இருந்தால் $a$ ஓர் இடது பூச்சியக்காரணி (right zero divisor) எனப்படும். இதுபோல் $b . a = 0$ என்னும் படியாக $b \neq 0$ என்னும் மூலகம் R-ல் இருந்தால், $a$ ஒரு வலது பூச்சியக்காரணி (right zero divisor) எனப்படும். ஒரு மூலகம் வலது பூச்சியக்காரணியாகவோ, இடது பூச்சியக் காரணியாகவோ இருந்தால் அது பூச்சியக் காரணி (zero divisor) எனப்படும்.

ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலகங்களை உடைய ஒவ்வொரு வளையத்திலும் '0' என்பது வலது பூச்சியக் காரணியாகவும் இடது பூச்சியக் காரணியாகவும், இருக்கும். வரையறையிலிருந்து, 'எண் அரங்கம் என்பது 0 ஐத் தவிர வேறு பூச்சியக் காரணிகளே இல்லாத

வளையம்' என்பது விளங்கும். எண் அரங்கம் என்பதுவும் வளைய மாகையால் நாம் வளையத்தைப் பற்றிப் படித்த குணங்கள், தேற் றங்கள் அனைத்தும் எண் அரங்கத்திற்கும் பொருந்தும்.

1·7. தேற்றம் : $a, b, c$ என்பவை ஓர் எண் அரங்கத்தின் மூலகங்கள் என்றால் $a \neq 0 \; \& \; a.b = a.c \Longrightarrow b = c$. [இதை நாம் வளையத்திற்கான இடது நீக்கு விதி எனலாம்.]

நிரூபணம் : $a \cdot b = a \cdot c,\; a \neq 0$ என்க.

$\therefore a \cdot b - a \cdot c = 0$

$\therefore a.(b - c) = 0$ (வளையத்திற்கான இடது பங்கீட்டு விதி.) ஆனால் 'எண் அரங்கத்தில் $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0$.' எனவே இங்கு $a \neq 0$ என்பதால் $a.(b - c) = 0 \Longrightarrow b - c = 0 \Longrightarrow b = c$.

1·8. தேற்றம் : $a, b, c$ என்பவை ஓர் எண் அரங்கத்தின் மூல கங்கள் என்றால் $a \neq 0 \; \& \; b \cdot a = c \cdot a \Longrightarrow b = c$. [இதை வளையத் திற்கான வலது நீக்கு விதி எனலாம்.] (முன் தேற்றத்தைப் போல் நிரூபிக்கவும்).

1·9. தேற்றம் : $(R, +, .)$ என்பது ஒரு வளையம் என்க. $a, b, c$ என்பவை R-ன் மூலகங்களாக இருக்கும்போது '$a \neq 0 \; \& \; a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c$' என்றால் $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்க மாகும்.

நிரூபணம் : $a, b$ என்பவை R-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூல கங்கள் என்க. இப்பொழுது $a = 0$ என்று இருக்கலாம். $a \neq 0$ என்றால் $a \cdot b = a \cdot 0$ என்று எழுதலாம். [$\because a.0 = 0$]

இப்பொழுது $a \neq 0 \; \& \; a \cdot b = a \cdot 0$

எனவே $b = 0$ [இடது நீக்கல் விதி உண்மையாக இருப்பதால்] இவ்வாறு $a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0$.

$\therefore$ $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

1·10. தேற்றம் : $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. $a, b, c$ என்பவை R-ன் மூலகங்களாக இருக்கும்போது '$a \neq 0 \; \& \; b \cdot a = c \cdot a \Longrightarrow b \cdot c$' என்றால் $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கமாகும். [இதை முன்னைய தேற்றத்தைப் போல் நிரூபிக்கவும்.]

1·11. தேற்றம் : ஓர் எண் அரங்கத்தில் இடது நீக்கல் விதியும் வலது நீக்கல் விதியும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

இடது நீக்கல் விதி உண்மை என்க:

வலது நீக்கல் விதி உண்மை என்று நிறுவ:

$a, b, c$ என்பவை வளையத்தின் மூலகங்கள் என்றும் $a \neq 0$ என்றும் எடுத்துக்கொள்க. $b \cdot a = c \cdot a$ என்க.

$$\therefore\ b.a - c.a = 0$$

அதாவது $(b - c) \cdot a = 0$ (வலது பங்கீட்டு விதி)

அதாவது $(b-c).a = (b-c).0$ ($(b-c)$ வளையத்தின் மூலகம்.) இப்பொழுது $b.-c \neq 0$ என்றால் இடது நீக்கு விதிப்படி (இடது நீக்கு விதி உண்மை என்று எடுத்துள்ளோம்.) $a = 0$. ஆனால் $a \neq 0$ என்று எடுத்துள்ளோம். எனவே $b - c = 0$. அதாவது $b = c$.

இவ்வாறு $a \neq 0$ & $b \cdot a = c \cdot a \Longrightarrow b = c$.

அதாவது இடது நீக்கு விதி $\Longrightarrow$ வலது நீக்கு விதி.

இதுபோலவே வலது நீக்கு விதி $\Longrightarrow$ இடது நீக்கு விதி என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு: இத் தேற்றத்தை, தேற்றங்கள் 1·7,8,9,10 ஆகியவற்றை உபயோகித்தும் நிரூபிக்கலாம்.

மேற்குறிப்பிட்ட 5 தேற்றங்களையும் சேர்த்து மொத்தமாகக் கீழ் வரும் தேற்றமாகக் குறிப்பிடலாம்.

1·12. தேற்றம்: $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் பின்வரும் மூன்று கூற்றுகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

(i) $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கம்.

(ii) $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ என்றால் $a.b = a.c \Longrightarrow b = c$.

(iii) $a, b, c \in R$, $a \neq 0$ என்றால் $b.a = c.a \Longrightarrow b = c$.

1·13. தேற்றம்: $(R, +, .)$ என்பது முடியும் அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட ஓர் எண் அரங்கம் என்றால் $(R - \{0\}, .)$ ஒரு குழுவாகும்.

நிரூபணம்: $R - \{0\}$ என்பதை $R'$ என்று குறிப்போம்.

$a, b \in R'$ என்க. எனவே $a \neq 0, b \neq 0$

$\therefore \; a \, . \, b \in R' \qquad (\because a \, . \, b = 0 \Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b = 0)$

இவ்வாறு $a \in R', b \in R' \Longrightarrow a \, . \, b \in R'$. ... ... (1)

R′ என்பது R-ன் உட்கணம் என்பதாலும் R-ன் மூலகங்கள் சேர்ப்பு விதிக்கு உட்பட்டிருப்பதாலும், R′-ன் மூலகங்களும் சேர்ப்பு விதிக்கு (′ . ′-ன் கீழ்) உட்பட்டிருக்கும். ... ... (2)

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ என்பவை R′-ன் மூலகங்கள் என்க. $x$ என்பது இவற்றுள் ஏதேனும் ஒரு $a_i$ என்க. இப்பொழுது $M = \{a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x\}$ என்னும் கணத்தை எடுத்துக்கொள்க. $x \neq 0, a_i \neq 0$ என்பதால் $a_i x \neq 0$.

எனவே $a_i x \in R' \quad \forall \, i$.

மேலும் $a_i x = a_j x \Longrightarrow a_i = a_j$ [ (R, +, .) ஓர் எண் அரங்கம்]

எனவே M என்னும் கணத்திலுள்ள மூலகங்கள் வெவ்வேறானவையாகும்.

இப்பொழுது (i) M-ல் வெவ்வேறான $n$ மூலகங்கள் உள்ளன.

(ii) M-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் R′-ன் மூலகமாகும்.

(iii) R′-ல் வெவ்வேறான $n$ மூலகங்களே உள்ளன

எனவே $M = R'$ என்பது தெளிவு.

எனவே $x \in \{a_1 x, a_2 x, \ldots, a_n x\}$

$\therefore \; x = a_l \, x$ என்னும்படியாக $a_l$ என்ற மூலகம் R′-ல் உள்ளது

இப்பொழுது $M_1 = \{ a_1 a_l, a_2 a_l, \ldots, a_n a_l\}$ என்னும் கணத்தை எடுத்துக் கொள்க. முன்போலவே $M_1 = R'$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

இப்பொழுது $a_i$ என்பது R′-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. ... ... ... ... ... (4)

∴ $a_i = a_j a_l$ என்னும்படியாக $a_j a_l \in M_1$

அதாவது $a_i = a_j a_l$ என்னும்படியாக $a_j \in R'$ ... (5)

முன்னர் எடுத்துக்கொண்ட $x$ ஆல் இருபுறமும் '.' என்ற செய்லியை நிகழ்த்தினால் $a_i x = (a_j \cdot a_l) \cdot x = a_j (a_l x) = a_j x$ : (1)-லிருந்து

இப்பொழுது $x \neq 0$ என்பதால் $a_i x = a_j x \Longrightarrow a_i = a_j$

[எண் அரங்கத்திற்கான வலது நீக்கு விதிப்படி].

எனவே (4), (5) ஆகியவற்றிலிருந்து

$a_i = a_i \cdot a_l \ \forall \ a_i \in R'$

அதாவது $a_l$ என்னும் வலது அலகு R′-ல் உள்ளது ... (6)

$a_p$ என்பது R′-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்றால் $M_2 = \{ a_p a_1, a_p a_2, \ldots, a_p a_n \}$ என்ற கணமும் R′ம்-ஒன்றுதான் என்று முன்போலவே நிரூபிக்கலாம். மேலும் $a_l \in R'$ என்பதால்

$a_l \in M_2$. அதாவது $a_l = a_p \cdot a_q$ என்னும்படியாக $a_q \in R'$.

அதாவது R′-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்திற்கும், வலது எதிர்மறை ஒன்று உள்ளது. ... ... ... ... ... (7)

(1), (2), (6), (7) ஆகியவற்றிலிருந்து (R′, . ) ஒரு குழுவாகும்.

1·14. எ. கா.: (R, +, .) என்பது அலகையுடைய ஒரு வளையம் என்க. $u$ என்னும் R-ன் மூலகத்திற்கு வலது எதிர்மறை இருக்கிறது என்க. பின்வரும் மூன்று நிபந்தனைகளும் ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை என்று நிரூபிக்க.

(i) $u$ என்ற மூலகத்திற்கு ஒன்றிற்கு மேற்பட்ட வலது எதிர்மறைகள் உள்ளன.

(ii) $u$ ஓர் அலகுக் காரணி அல்ல.

(iii) $u$ ஓர் இடது பூச்சியக் காரணியாகும். (left zero divisor)

[அலகுக் காரணி என்பது வளையத்தில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.]

நிரூபணம் : பாகம் I : (i) $\Longrightarrow$ (ii) என்று நிரூபிக்க.

$u', u''$ ஆகிய வெவ்வேறான மூலகங்கள் இரண்டும் $u$-ன் வலது எதிர்மறைகள் என்று எடுத்துக் கொள்க.

இப்பொழுது $u.u' = 1$ & $u.u'' = 1$ ... ... (1)

$u$ ஓர் அலகுக் காரணி என்றால், $u_l$ என்னும் இடது எதிர்மறை

$u_l . u = 1$ என்னும்படியாக உள்ளது.

இப்பொழுது $u_l . 1 = u_l . 1$

$\therefore$ (1)-லிருந்து $u_l . (u . u') = u_l . (u . u'')$

அதாவது $(u_l . u) . u' = (u_l . u) . u''$

(R-ல் உள்ள சேர்ப்பு விதி)

$\therefore \quad 1 . u' = 1 . u''$ $\quad [u_l . u = 1]$

அதாவது $u' = u''$.

இது தவறு ; ஏனெனில் $u', u''$ ஆகியவை வெவ்வேறானவை.

என்வே $u$ ஓர் அலகுக் காரணி அல்ல.

அதாவது (i) $\Longrightarrow$ (ii),

பாகம் II : (ii) $\longrightarrow$ (iii) என்று நிரூபிக்க.

$u'$ என்பது $u$-ன் வலது எதிர்மறை எனக. (கணக்கின்படி இவ்வாறு ஒன்று உள்ளது.)

$\therefore \quad u . u' = 1$ ... ... ... ... (2)

$u$ என்பது அலகு அல்ல; எனவே $u' . u \neq 1$

அதாவது $u . u' \neq u' u$.

$\therefore \quad u . u' - u' . u \neq 0$ ... ... ... (3)

இப்பொழுது $u . (u . u' - u' . u) = u . (1 - u' . u)$ [(2)லிருந்து]

$= u - u . (u' . u)$

$= u - (u . u') \; u$

$= u - 1 . u$ [(2)லிருந்து)

$= u - u = 0.$

எனவே (3)லிருந்து, $u$ ஓர் இடது பூச்சியக் காரணியாகும்.

அதாவது (ii) $\Longrightarrow$ (iii)

பாகம் III : (iii) $\Longrightarrow$ (i) என்று நிருபிக்க.

$u$ ஓர் இடது பூச்சியக் காரணி என்க. (iii)

எனவே $u \cdot x = 0$ என்னும்படியாக $x \neq 0$ என்னும் மூலகம் R-ல் உள்ளது. $u'$ என்பது $u$-ன் வலது எதிர்மறை என்க. [கணக்கின்படி வலது எதிர்மறை உளது].

$$\text{இப்பொழுது } u \cdot (u' + x) = u \cdot u' + u \cdot x$$
$$= 1 + 0$$
$$= 1$$

எனவே $u' + x$ என்னும் மூலகமும் $u$-ன் வலது எதிர்மறை ஆகும். ஆனால் $x \neq 0$ என்பதாலும், (R, +) ஒரு குழுவாகையா லும் $u' \neq u' + x$. இவ்வாறு $u$-க்கு $u', u' + x$ என்னும் இரண்டு வலது எதிர்மறைகள் உள்ளன. அதாவது (iii) $\Longrightarrow$ (i).

பாகம் IV : பாகங்கள் I, II, III ஆகியவற்றிலிருந்து (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i). எனவே, (i), (ii,) (iii) ஆகியவை ஒன்றுக்கொன்று சமமானவை.

குறிப்பு : மேலே கொடுத்திருக்கும் கணக்கில் "வலது" "இடது" ஆகியவற்றைத் தமக்குள் மாற்றிக் கொள்வதால் (Interchange) கிடைக்கும் கணக்கை எழுதி நிருபிக்கவும்.

எண் அரங்கத்தின் குண எண் (Characteristic)

எண் அரங்கமும் வலயம் ஆகையால், வலயத்தின் குண எண் சம்பந்தமாக வரையறுக்கப்பட்ட, நிருபிக்கப்பட்ட அனைத்தும் எண் அரங்கத்துக்கும் பொருந்தும்.

1·15. தேற்றம் : (R, +, .) என்பது ஓர் எண் அரங்கம் என்க. $a$ என்னும் மூலகத்தின் பரிமாணம் ((R, +)-ல்) $m$ என்றால் $0$ ஐத் தவிர R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $m$ ஆகும்.

நிருபணம் : பாகம் I :

$a$-ன் பரிமாணம் (order) $m$ என்றால் $ma = 0$ ($m$, மிகை முழு எண்)

$0 \neq d$ என்பது . R-ல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $ma = 0$ என்பதால் $(ma) \cdot d = 0$ . அதாவது

$$(a+a+\ldots m \text{ தடவைகள்}) . d = 0.$$

$$\therefore \quad a.d + a.d + \ldots m \text{ தடவைகள்} = 0.$$

$$\therefore \quad a \cdot (d+d+ \ldots m \text{ தடவைகள்}) = 0$$

$$\therefore \quad a \cdot (md) = 0$$

இப்பொழுது $a \neq 0$ என்பதால் $(md) = 0$ ... ... (1)
[எண் அரங்கத்தின் குணம்]

பாகம் II : இப்பொழுது $nd = 0$ என்னும்படியாக உள்ள $n$ என்னும் மிகை முழு எண்களில் '$m$' தான் மிகவும் சிறியது என்று நிறுவினால் $d$-ன் பரிமாணம் $m$ என்று முடிவு கட்டலாம்.

$nd = 0$, $n < m$ என்னும்படியாக $n$ என்னும் மிகை முழு எண் உள்ளது என்க. ... ... ... ... (2)

எனவே பாகம் I-ன் படி $na = 0$, $n < m$. [பாகம் I-ல் உள்ள எழுத்துகளை விடுத்து அதில் நிறுவப்பட்டிருக்கும் கோட்பாட்டை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டிருக்கிறோம்.] எனவே $a$-ன் பரிமாணம் $m$ அல்ல. இது தவறானது!! எனவே (2) தவறானது. அதாவது $nd = 0$, $n < m$ என்னும்படியாக $n$ என்ற மிகை முழு எண் இல்லை. ... ... ... ... (3)

(1), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $d$-ன் பரிமாணம் $m$ ஆகும்.

**1·16. தேற்றம் :** $(R, +, .)$ என்பது ஓர் எண் அரங்கம் என்க. $a\ (\neq 0)$ என்னும் மூலகத்தின் பரிமாணம் '$m$' என்றால் $m$ ஒரு பகா எண் (வகுபடா எண், prime number) ஆக இருக்கும்.

**நிரூபணம் :** எண் அரங்கத்தில் $0$ (additive identity) ஐத் தவிர ஒரே ஒரு மூலகம்தான் உள்ளது என்றால் $(R, +)$ ஒரு குழுவாகையால் இம்மூலகத்தின் பரிமாணம் 2 ஆகும். 2 என்பது பகா எண் (prime number). எனவே தேற்றத்தை '$0$' ஐத் தவிர ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட மூலகங்கள் உள்ள எண் அரங்கத்திற்கு நிரூபித்தால் போதும்.

$m$ என்பது வகுபடும் எண் என்க. ... ... (1)

$\therefore$ $m = m_1 m_2$, $1 < m_i < m$ என்னும்படியாக $m_1$, $m_2$ என்ற இரு முழு எண்கள் உள்ளன. $a_1 \neq 0$, $a_1 \neq a$ என்னும்படியாக $a_1$ என்னும் R-ன் மூலகத்தை எடுத்துக் கொள்க. $a \neq 0$, $a_1 \neq$ என்பதால் $aa_1 \neq 0$ (எண் அரங்கம்.)

$a$-ன் பரிமாணம் $m$ என்பதால் முன் தேற்றப்படி $aa_1$-ன் பரிமாணமும் '$m$' ஆகும்.

அதாவது $aa_1 + aa_1 + \ldots m$ தடவைகள் $= 0$

அதாவது $aa_1 + aa_1 + \ldots m_1 m_2$ தடவைகள் $= 0$

அதாவது ($aa_1 + aa_1 + \ldots m_1$ தடவைகள்) +

($aa_1 + aa_1 + \ldots m_1$ தடவைகள்) + ...

$m_2$ தடவைகள் $= 0$ ... ... (2)

ஆனால் $aa_1 + aa_1 + \ldots m_1$ தடவைகள் $= a(a_1 + a_1 + \ldots m_1$ தடவைகள்$) = a.(m_1 a_1)$

எனவே (2) லிருந்து $a.(m_1 a_1) + a.(m_1 a_1) + \ldots m_2$ தடவைகள் $= 0$

$\therefore$ ($a + a + \ldots m_2$ தடவைகள்)$.(m_1 a_1) \ldots 0$

அதாவது $(m_2 a).(m_1 a_1) = 0$

$\therefore$ $m_2 a = 0$ அல்லது $m_1 a_1 = 0$ ... ... (3)

((R, +, .) எண் அரங்கம்)

$1 < m_2 < m$ என்பதாலும் $a$-ன் பரிமாணம் $m$ என்பதாலும், $m_2 a \neq 0$

எனவே (3) லிருந்து $m_1 a_1 = 0$, $1 < m_1 < m$.

ஆனால் தேற்றம் 1·15-ன் படி $a_1$-ன் பரிமாணம் $m$ ஆகும்.

எனவே $m_1 a_1 = 0$, $1 < m_1 < m$ என்பது தவறு.

அதாவது (1)-ல் நாம் எடுத்துக்கொண்டது தவறானது.

எனவே $m$ பகா எண்ணாகும்.

**1·17.** தேற்றம்: (R, +, .) என்ற எண் அரங்கத்தின் குண எண் (Characteristic) '0' என்றால் R-ல் உள்ள 0 அல்லாத ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $\infty$ ஆகும். (R, +, .)-ன் குண எண்

$m > 0$ என்றால் $m$ என்பது பகா எண் (வகுபடா எண், prime number)ஆக இருப்பதோடு R-ல் உள்ள 0 அல்லாத ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $m$ ஆகும்.

நிரூபணம் : பாகம் I : $(R, +, .)$-ன் குண எண் 0 என்க.

$a (\neq 0)$ என்னும் மூலகத்தின் பரிமாணம் $n$ என்றால், தேற்றம் 1·15-ன் படி R-ல் உள்ள 0 அல்லாத ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $n$ ஆகும். எனவே R-ல் உள்ள மூலகங்களின் பரிமாணங்களின் உச்ச வரம்பு (maximum) '$n$' ஆகும். எனவே $(R, +)$-ன் குண எண் $n$ ஆகும். இது தவறு ! ! எனவே R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $\infty$ ஆகும்.

பாகம் II : $(R, +, .)$-ன் குண எண் $m > 0$ என்க.

எனவே R-ன் மூலகங்களின் பரிமாணங்களின் உச்ச வரம்பு $m$ ஆகும். பரிமாணங்கள் என்பவை மிகை முழு எண்களாகையால் இச் சந்தர்ப்பத்தில் $m$ என்னும் பரிமாணத்தையுடைய ஒரு மூலகமாவது இருக்கவேண்டும். எனவே தேற்றம் 1·15-ன்படி 0 அல்லாத ஒவ்வொரு மூலகத்தின் பரிமாணமும் $m$ ஆகும்.

$m$ என்பது மூலகத்தின் பரிமாணமாக இருப்பதால் தேற்றம் 1·16-ன்படி $m$ ஒரு பகா எண்ணாகும் (prime number).

குறிப்பு : மேலே உள்ள தேற்றத்திலிருந்து, 0 அல்லாத குண எண்ணை உடைய ஓர் எண் அரங்கத்தின் கூட்டல் குழுவில் உள்ள ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒரே வகுபடா எண்ணைப் பரிமாணமாகக் கொண்டிருக்கும். இத்தகைய குழு ஆதாரப் பரிமாற்றுக் குழு (elementary abelian group) எனப்படும். உதாரணமாக $(Z_7, +)$, $C_{18}$, $(P(X), \Delta)$ ஆகியவை ஆதாரப் பரிமாற்றுக் குழுக்களாகும். இவ்வாறாக,

கிளைத் தேற்றம் : 0 அல்லாத குண எண்ணை உடைய ஓர் எண் அரங்கத்தின் கூட்டல் குழு ஆதாரப் பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

ஓரினச் சார்புகளும் புனல் சார்புகளும்

எண் அரங்கம் என்பதுவும் வளையம் ஆகையால் வளையங்களுக்காக வரையறுக்கப்பட்டிருக்கும் புனல் சார்பு, ஓரினச் சார்பு ஆகியவற்றையும் அவற்றின் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ள குணங்களையும் அப்படியே நாம் எண் அரங்கங்களுக்கும் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இது தவிர, எண் அரங்கத்திற்கு இருக்கும் அதிகப்படியான குணங்கள்,

ஓரினச் சார்பு, புனல் சார்பு ஆகியவற்றின் கீழ் எவ்வாறு எடுத்துச் செல்லப்படுகின்றன என்பதைப் பார்ப்போம்.

1.18. தேற்றம் : ஓர் எண் அரங்கத்தின் ஓரினச் சார்புப் பிம்பம் (isomorphic image) எண் அரங்கம் ஆகும்.

நிரூபணம் : $f : R \longrightarrow S$ என்பது $(R, +, .)$ என்ற எண் அரங்கத்திலிருந்து $(S, \oplus, \odot)$ என்ற வளையத்திற்கு வரையறுக்கப் பட்டுள்ள ஓரினச் சார்பு என்க. இப்பொழுது $(f(R), \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்பதும், $f(0) = 0'$ [ $0'$ என்பது $(S, \oplus)$-ன் அலகு ] என்பதுவும் நமக்குத் தெரியும்.

$a \neq 0', b \neq 0'$ என்பவை $f(R)$-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க. இப்பொழுது $f$ என்பது $1-1$ ஆகையால், (isomorphism) $x \neq 0, y \neq 0$ என்னும் இரு மூலகங்கள் R-ல் $f(x) = a, f(y) = b$ என்னும் விதிக்குட்பட்டு உள்ளன.

இப்பொழுது $a \odot b = f(x) \odot f(y)$

$= f(x . y)$ ...(1) ($f$, ஓரினச் சார்பு)

$x \neq 0, y \neq 0$ என்பதால் $x . y \neq 0$

[ $(R, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கம் ]

எனவே, $f(x . y) \neq 0'$

[ $f$, ஒன்றுக்கொன்றானது ; மேலும் $f(0) = 0'$ ]

எனவே, (1)-லிருந்து $a \odot b \neq 0'$.

அதாவது, $f(R)$-ல், $a \neq 0', b \neq 0' \Longrightarrow a \odot b \neq 0'$.

எனவே, $(f(R), \oplus, \odot)$ ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

குறிப்பு : எண் அரங்கத்தின் ஓரினச் சார்புப் பிம்பம் எண் அரங்கமாக உள்ளது. ஆனால் எண் அரங்கத்தின் புனல் சார்புப் பிம்பம் எண் அரங்கமாக இருக்கவேண்டியதில்லை. இதைப் பின்வரும் எடுத்துக் காட்டு விளக்கும்.

1.19. எ.கா. : $(Z, +, .)$ என்னும் எண் அரங்கத்திலிருந்து $(Z_6, +, .)$ என்னும் வளையத்திற்கு $f(x) =$ '$x$ ஐ 6 ஆல் வகுக்கும் போது கிடைக்கும் மீதி' என்று வரையறுக்கப்படும் சார்பு புனல் சார்பாகும். இப் புனல் சார்பின் கீழ் $(Z, +, .)$-ன் பிம்பம் $(Z_6, +, .)$ ஆகும். ஆனால், $(Z_6, +, .)$ என்பது எண் அரங்கம் அல்ல. ஏனெனில், $2 \neq 0, 3 \neq 0$ ஆனால் $2 . 3 = 6 \neq 0$.

## பயிற்சி

1. வளையங்களா என்று பார்ப்பதற்காக முந்தைய பயிற்சித் தொகுப்புகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள அமைப்புகளில் எவை எவை எண் அரங்கங்கள் என்று காண்க. மேலும் நாம் முன்னர் சந்தித்த ஒவ்வொரு வளையமும், எண் அரங்கமா, பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டதா, அலகை யுடையதா என்று பரிசீலனை செய்க.

2. $(Z_8, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கம் அல்ல என்றும், $(Z_5, +, .)$ ஓர் எண் அரங்கம் என்றும் நிரூபிக்க. இவைகளிலிருந்து $(Z_m, +, .)$ என்பது எப்பொழுது எண் அரங்கமாக இருக்கும் என்று காண்க.

3. பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் (polynomials) வளையம் ஓர் எண் அரங்கம் என்று நிரூபிக்க. [குணகங்கள், மெய் எண்கள், விகிதமுறு எண்கள், முழு எண்கள் ஆகியவற்றுள் எதாக இருப்பினும் சரி.]

4. ஓர் எண் அரங்கத்தின் உள் வளையங்கள் ஒவ்வொன்றும் ஓர் எண் அரங்கம் என்று நிரூபிக்க.

5. $x$ என்பது $(R, +, .)$ என்ற வளையத்தில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $x^n = 0$ என்னும்படியாக $n$ என்னும் மிகை முழு எண் ஒன்று இருந்தால், $x$ ஒரு பூச்சிய ஆற்றல் மூலகம் (nil potent element) எனப்படும். ஓர் எண் அரங்கத்தில் '0' என்ற மூலகம் மட்டுமே பூச்சிய ஆற்றல் மூலகம் என்று நிறுவுக.

6. ஒரு வளையத்திலுள்ள $a$ என்னும் மூலகம் $a \, . \, a = a$ என்னும் விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் அம் மூலகம் தன் ஆற்றல் மூலகம் (idempotent element) எனப்படும். $(R, +, .)$ என்ற எண் அரங்கத்தில் $b \neq 0$ என்ற மூலகம் தன் ஆற்றல் மூலகமாக இருந்தால் $b$ என்பது '.'-ன் கீழ் அலகாக இருக்கும் என்று நிறுவுக.

7. ஓர் எண் அரங்கத்திற்கு ஒரே ஓர் இடது அலகு $e$ தான் உள்ளது என்றால், $e$ என்பது இருபுற அலகு (identity) என்று நிறுவுக.

8. பயிற்சி 7 ஐ வலது அலகு (right identity)-க்கு எழுதி நிரூபிக்க.

9. (a) $(R, +, .)$ என்பது ஒரு கணித அமைப்பு என்றும், $(A, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்றும் எடுத்துக் கொள்க. $f : R \longrightarrow A$ என்னும் ஒன்றுக்கொன்றுன முழுச் சார்பின் கீழ் $+$, '$.$' ஆகிய செயலிகள் $a + b = f^{-1}[f(a) \oplus f(b)]$, $a . b \; f^{-1}[f(a) \odot f(b)]$ என்னும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருந்தால் $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க. [முன்னரே இதைக் கொடுத்துள்ளோம்.]

(b) 9 (a)-ல் $(A, \oplus, \odot)$ ஓர் எண் அரங்கம் என்றால், $(R, +, .)$-ம் ஓர் எண் அரங்கமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

(c) $(R, +, .)$ என்பது 1 என்னும் அலகினையுடைய எண் அரங்கம் என்க. R-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை $a \oplus b = a + b - 1$, $a \odot b = a + b - ab$ என்று வரையறுத்தால் $(R, \oplus, \odot)$ என்பது ஓர் எண் அரங்கமாக இருக்கும் என்று நிரூபிக்க.

10. $(R, +, .)$ ஒரு வளையம் என்க. $R \times R$-ல் $\oplus$, $\odot$ என்னும் செயலிகளை $(a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$, $(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad+bc)$ என்று வரையறுக்க.

(i) $(R^2, \oplus, \odot)$ ஒரு வளையம் என்று நிரூபிக்க. $(R \times R = R^2)$

(ii) $(R, +, .)$ ஒரு பரிமாற்று வளையம் $\Longleftrightarrow$ $(R^2, \oplus, \odot)$ பரிமாற்று வளையம் என்று நிரூபிக்க.

(iii) $(R, +, .)$ எண் அரங்கமாக இருந்தால் $(R^2, \oplus, \odot)$ என்பதுவும் எண் அரங்கமாக இருக்குமா என்பதை ஆராய்க.

(iv) $(R, +, .)$-ல் அலகு இருந்தால் $(R^2, \oplus, \odot)$-ல் அலகு இருக்குமா என்பதை ஆராய்க. அலகு இருந்தால் அது என்ன என்பதைக் காண்க.

11. (i) 0 என்ற குண எண்ணை உடைய எண் அரங்கம் முடியா அளவு மூலகங்களைக் கொண்டிருக்கும் என்று காட்டுக.

(ii) 0 அல்லாத குண எண்ணைக் கொண்டுள்ள எண் அரங்கம், முடியும் அளவு (finite number) மூலகங்

களையோ, முடியா அளவு (infinite number) மூலகங்களையோ கொண்டிருக்கலாமா என்று ஆராய்க.

(iii) முடியும் அளவு மூலகங்களைக்கொண்ட ஓர் எண் அரங்கத்தின் குண எண் $0$ ஆக இருக்க முடியாது என்று நிறுவுக.

12. (i) $(R, +, .)$ என்பது $m\ (\neq 0)$ என்னும் குண எண்ணை யுடைய என் அரங்கம் என்க. R-ன் ஒவ்வொரு மூலகமும் [$0$ ஐத் தவிர] $m$ என்ற பரிமாணத்தை உடைய ஓர் உட்குழுவை [$(R, +)$-ன்] உருவாக்கும் என்று நிறுவுக.

(ii) $(R, +, .)$ என்ற எண் அரங்கத்தின் குண எண் '$0$' என்றால் $(R, +)$ என்ற குழுவுக்கு முடியும் உட்குழு [$(\{0\}) +$) ஐத் தவிர] இல்லை என்று நிறுவுக.

13. மேலே கொடுத்துள்ள தேற்றம் 1.17, எண் அரங்கத்திற்குப் பதிலாகத் தனி வளையங்களிலும் (simple ring) உண்மையாக இருக்குமா என்பதை ஆராய்க.

14. $(D, +, .)$ என்ற அலகையுடைய எண் அரங்கத்தின் குண எண் $p$ என்றால், $(Z_p, +, .)$ என்னும் எண் அரங்கத்துடன் அமைப்பில் ஒன்றான எண் அரங்கம் ஒன்று $(D, +, .)$-ல் உள்ளது என்று நிறுவுக.

15. $(D, +, \cdot)$ என்ற அலகையுடைய எண் அரங்கத்தின் குண எண் '$0$' என்றால், $(Z, +, .)$ என்னும் எண் அரங்கத்துடன் அமைப்பில் ஒன்றான எண் அரங்கம் ஒன்று $(D, +, .)$-ல் உள்ளது என்று நிறுவுக.

16. பயிற்சி 14, 15 ஆகியவற்றில் உள்ள $(D, +, .)$-ல் அலகு இல்லாவிட்டால் அவைகளை நிரூபிக்க முடியுமா என்று காண்க.

# 2. வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம்

**(Ordered integral domain)**

முழு எண்களின் எண் அரங்கமாகிய (Z, + , . ) ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். முழு எண்களில் 1, 2, 3, ...... என்ற ஒரு வரிசை முறை உள்ளது. 0 என்பது +-ன் கீழ் அலகாகவும் 1 என்பது '.'-ன் கீழ் அலகாகவும் உள்ளன. இது தவிர மீதி உள்ள எண்கள் அனைத்தும் ஒரே முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாக இல்லை. 4 என்ற எண் 2 என்ற எண்ணை விடப் பெரியது என்கிறோம். 4 என்ற எண்ணை மிகை (positive) எண் என்றும் —7 என்ற எண்ணைக் குறை (negative) எண் என்றும் சொல்கிறோம். இரண்டு மிகை எண்களைக் கூட்டினால் மீண்டும் மிகை எண் கிடைக்கிறது. இதுபோன்ற குணங்களை நாம் வரையறுத்துக் கூறுவது எப்படி? இக் குணங்களுக்கெல்லாம் அடிப்படையான குணமாக நாம் பின்வரும் குணத்தை எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

பூச்சியமல்லாத முழு எண்களைப் பின்வரும் மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டு $Z^+$, $Z^-$ என்று இரு உட்கணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) $Z^-$ என்பது $Z^+$-ல் உள்ள மூலகங்களின் எதிர்மறைகளால் ஆனது.

(ii) $a, b \in Z^+ \Longrightarrow a+b \in Z^+$.

(iii) $a, b \in Z^+ \Longrightarrow a, b \in Z^+$.

இதிலிருந்து, இரண்டு எண்களுக்கிடையே சிறியது, பெரியது என்பதைக் குறிக்கும் $<$ என்னும் தொடர்பை $a < b \Longleftrightarrow b - a \in Z^+$ என்று வரையறுத்து, $<$ என்னும் தொடர்பின் மற்ற குணங்களை நிரூபிக்க முடியும். இக் காரணங்களை முன்னிட்டு, மேலே கொடுத்துள்ள குணத்தையே வரிசையிடுதலின் (ordering) அடிப்படை நிபந்தனையாக எடுத்துக் கொண்டு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

**2.1.** வரையறை : $(D, +, .)$ என்னும் எண் அரங்கத்திலுள்ள '$0$' அல்லாத மூலகங்களைப் பின்வரும் மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டிருக்கும்படியாக $D^+$, $D_-$ என்னும் இரு உட்கணங்களாகப் பிரிக்க முடிந்தால் $(D, +, .)$ ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் (ordered integral domain) எனப்படும்.

(i) $D^-$ என்பது $D^+$ ல் உள்ள மூலகங்களின் எதிர்மறை மூலகங்களால் (+-ன் கீழ்) ஆனது.

(ii) $a, b \in D^+ \Longrightarrow a+b \in D^+$

(iii) $a, b \in D^+ \Longrightarrow a \cdot b \in D^+$.

குறிப்பு : இந்த $D^+ \cup D^- \cup \{0\} = D$ என்பது குறிப்பிடத் தக்கது.

**2.2.** எ.கா. : $(Z, +, .)$ என்ற எண் அரங்கம் வரிசைப்பட்டதாகும். $Z^+ =$ மிகை எண்கள் என்றும், $Z^-$ என்பது குறை எண்கள் என்றும் எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

**2.3** எ. கா. : $(Q, +, .)$ என்ற எண் அரங்கமும் வரிசைப்பட்டதாகும். இங்கும் $Q^+ =$ மிகை எண்கள், என்றும், $Q^- =$ குறை எண்கள் என்றும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

**2.4.** எ. கா. : $R^+ =$ மிகை மெய் எண்கள், $R^- =$ குறை மெய் எண்கள் என்னும் பிரிவின் கீழ் $(R, +, .)$ என்ற மெய் எண்களின் எண் அரங்கம் வரிசைப்பட்டதாகும்.

**2.5.** வரையறை : $(D, +, .)$ என்னும் எண் அரங்கம் வரிசைப்பட்டது என்க. $D^+$-ன் மூலகங்கள் மிகை மூலகங்கள் (positive elements) என்றும், $D^-$-ன் மூலகங்கள் குறை மூலகங்கள் (negative elements) என்றும் கூறப்படும்.

வரையறை 2·5-லும் இதற்கு மேலும் உள்ள வாதங்களில் $D^+$, $D^-$ ஆகியவற்றிற்குக் குறிப்பிட்டிருந்தாலொழிய வரையறை 2·1-ல் உள்ள பொருளையே எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

**2.6.** குணம் : $D^+ \cap D^- = \phi$.

நிரூபணம் : $0$ என்னும் மூலகம் $D^+$, $D^-$ ஆகியவற்றுள் இல்லை. எனவே, $D^+ \cap D^-$-ல் மூலகம் இருந்தால் அது '$0$' அல்லாத மூலகமாகத்தான் இருக்கவேண்டும். எனவே முடியுமானால் $x \in D^+ \cap D^-$, $x \neq 0$ என்க.

இங்கு $x \in D^-$.

எனவே, $x = -y$ என்னும்படியாக $y \in D^+$ ... ... ... (1)

[ வரிசையிடுதலுக்கான நிபந்தனை (i)-ன் படி ]

இப்பொழுது, $x \in D^+$, $y \in D^+$. எனவே, $x + y \in D^+$

அதாவது, $(-y) + y \in D^+$ ( (1)-லிருந்து )

அதாவது, $0 \in D^+$. இது மாறுபாடாகும் (contradiction).

எனவே, $D^+ \cap D^-$-ல் மூலகம் இல்லை. அதாவது $D^+ \cap D^- = \phi$.

**2·7.** வரையறை : $a, b$ என்பன D-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்க. '$a$ ஐ விடப் பெரியது $b$' என்னும் தொடர்பை,

'$a$ ஐ விடப் பெரியது $b$' $\Longleftrightarrow b - a \in D^+$

என்று வரையறுக்கிறோம். $a$ ஐ விடப் பெரியது $b$ என்பதை $a < b$ என்று குறியீட்டு வடிவில் எழுதலாம். '$a$ ஐ விடப் பெரியது $b$' என்பதை '$b$ ஐ விடச் சிறியது $a$' என்று கூறலாம். இதனை $b > a$ என்று குறியீட்டு வடிவில் எழுதலாம். இவ்வாறாக, $a < b \Longleftrightarrow b > a \Longleftrightarrow b - a \in D^+$.

முழு எண்களின் எண் அரங்கத்தில் மேற்கூறியவை நமக்கு நன்றாகத் தெரிந்தவையாகும். மேற்குறிப்பிட்ட $<$ என்னும் தொடர்பின் குணங்கள் சிலவற்றைக் கீழே நிரூபிப்போம்.

**2·8.** குணம் : '$<$' என்னும் தொடர்பு, கடத்தும் விதி (transitive law)க்கு உட்பட்டிருக்கும்.

அதாவது, $a < b \;\&\; b < c \Longrightarrow a < c$.

நிரூபணம் : $a < b$, $b < c$ என்க.

$a < b \Longrightarrow b - a \in D^+$.

$b < c \Longrightarrow c - b \in D^+$.

$b - a \in D^+, c - b \in D^+ \Longrightarrow (b - a) + (c - b) \in D^+$

[ வரிசையிடுதலுக்கான நிபந்தனை ii ]

அதாவது, $b - a + c - b \in D^+$ [D-ல் உள்ள சேர்ப்பு விதி]

அதாவது, $b - b + c - a \in D^+$ [$(D, +)$ ஓர் அபீலியன் குழு]

அதாவது, $c - a \in D^+$.

$\therefore \quad a < c$

இவ்வாறு $a < b \;\&\; b < c \Longrightarrow a < c.$

**2·9.** குணம் : $a < b \Longrightarrow a + c < b + c \qquad \forall\, c \in D$

நிரூபணம் : $a < b \Longrightarrow b - a \in D^+.$

$$\Longrightarrow (b - a) + (c - c) \in D^+$$
$$\forall\, c \in D. \; [\because (c - c) = 0\,]$$
$$\Longrightarrow (b + c) - (a + c) \in D^+$$
$$\Longrightarrow a + c < b + c.$$

இவ்வாறு $a < b \Longrightarrow a + c < b + c \qquad \forall\, c \in D.$

**2·10.** குணம் : $a < b \;\&\; 0 < c \Longrightarrow ac < bc.$

நிரூபணம் : $a < b \Longrightarrow b - a \in D^+$

$$0 < c \Longrightarrow c - 0 = c \in D^+$$

இப்பொழுது, $(b - a) \in D^+ \; c \in D^+ \Longrightarrow (b - a) \,.\, c \in D^+$

அதாவது $bc - ac \in D^+.$ எனவே $ac < bc.$

இவ்வாறு $a < b \;\&\; 0 < c \Longrightarrow ac < bc.$

**2·11.** குணம் : $a, b$ என்பவை D-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்றால், $a < b,\; b < a,\; a = b$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மட்டுமே (one and only one) உண்மையாக இருக்கும்.

நிரூபணம்: $a - b$ என்ற மூலகத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$D = \{0\} \cup D^+ \cup D^-$. இங்கு, $0 \notin D^+,\; 0 \notin D^-,\; D^+ \cap D^- = \phi$ என்பதால் $(b - a)$ என்னும் மூலகம் $\{0\}, D^+, D^-$ ஆகிய கணங்களுள் ஒன்றில் மட்டும் இருக்கவேண்டும்.

$$b - a \in \{0\} \Longrightarrow b - a = 0 \Longrightarrow b = a.$$
$$b - a \in D^+ \Longrightarrow a < b.$$
$$(b - a) \in D^- \Longrightarrow -(b - a) \in D^+$$
$$\Longrightarrow a - b \in D^+ \Longrightarrow b < a.$$

இவ்வாறு $a = b,\; a < b,\; b < a$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மட்டும் உண்மையாக இருக்கும்.

2.12. குணம் : $a \in D^-, b \in D^- \Longrightarrow ab \in D^+$. அதாவது D-ல் உள்ள குறை (negative) மூலகங்கள் இரண்டின் பெருக்கற் பலன் மிகை (positive) மூலகமாக இருக்கும்.

நிரூபணம் : $a \in D^- \Longrightarrow -a \in D^+$

$b \in D^- \Longrightarrow -b \in D^+$

$-a, -b \in D^+ \Longrightarrow (-a) \cdot (-b) \in D^+$

ஆனால் ஒரு வளையத்தில் $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$; எனவே $a \cdot b \in D^+$.

இவ்வாறு $a \in D^-, b \in D^- \Longrightarrow ab \in D^+$.

(D, + , .) என்பது வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் என்பதை உபயோகித்து '<' என்னும் தொடர்பை வரையறுத்து நாம் மேற் குறிப்பிட்ட குணங்களை நிரூபித்தோம். இனி, மேலே நிரூபித்த குணங்களில் எவை எவை ஒரு தொடர்புக்கு இருந்தால் அத் தொடர்பை உபயோகித்து எண் அரங்கத்தை வரிசையிட முடியும் என்பதைப் பார்ப்போம். உண்மையில் குணங்கள் 2·8, 2·9, 2·10, 2·11 ஆகியவை போதுமானவையாகும். இதைப் பின்வருமாறு தேற்றமாகக் குறிப்பிடலாம்.

2·13. தேற்றம் : (D, + , .) என்னும் எண் அரங்கத்திலுள்ள மூலகங்களுக்கிடையில் '$\leqslant$' என்னும் தொடர்பை (relation),

(i) D-ல் உள்ள $a, b$ என்ற எவையேனும் இரு மூலகங்களை எடுத்துக் கொண்டாலும் $a \leqslant b$, $b \leqslant a$, $a = b$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மட்டும் உண்மையாக இருக்கும்.

(ii) $a \leqslant b \;\&\; b \leqslant c \Longrightarrow a \leqslant c$.

(iii) $a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c \quad \forall\, c \in D$.

(iv) $a \leqslant b \;\&\; 0 \leqslant c \Longrightarrow ac \leqslant bc$.

என்ற விதிகளுக்கு உட்பட்டு வரையறுக்க முடியுமானால் (D, + , .) ஐ வரிசைப் படுத்த முடியும்.

நிரூபணம் : $0$ என்பதை (D, +)-ன் அலகு என்று எடுத்துள்ளோம். $D^+$, $D^-$ என்ற இரு உட்கணங்களையும்

$$D^+ = \left\{ x / x \in D \;\&\; 0 \leqslant x \right\}, \quad D^- = \left\{ x / x \in D \;\&\; x \leqslant 0 \right\}$$

என்று வரையறை செய்க.

$0 = 0$ என்பதால் $0 \leqslant 0$ என்பது உண்மை அல்ல. [நிபந்தனை (i)-ன் படி]. எனவே $0 \notin D^+$ & $0 \notin D^-$.

மேலும் '$0$' அல்லாத, '$a$' என்ற எந்த மூலகத்தை எடுத்துக் கொண்டாலும் $0 \neq a$ என்பதால் $a \leqslant 0$, $0 \leqslant a$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மட்டும் உண்மையாக இருக்கும். எனவே $a \in D^+$ அல்லது $a \in D^-$. இதிலிருந்து D-ல் உள்ள '$0$' அல்லாத மூலகங்கள் $D^+, D^-$ என்று இரு உட்கணங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளன என்பது தெளிவு. ... ... (1)

$a \in D^+$ என்க. எனவே $0 \leqslant a$.

இப்பொழுது (iii)-ன் படி $0 + (-a) \leqslant a + (-a)$

அதாவது $-a \leqslant 0$. எனவே $-a \in D^-$.

எனவே $a \in D^+ \Longrightarrow -a \in D^-$.

இதுபோலவே $a \in D^- \Longrightarrow -a \in D^+$ என்றும் நிரூபிக்கலாம். எனவே $D^-$ என்பது $D^+$-ல் உள்ள மூலகங்களின் குறை மூலகங்களால் (+-ன் கீழ்) ஆனதாகும். (2)

இப்பொழுது $a, b \in D^+$ என்க.

∴ $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$

$0 \leqslant a \Longrightarrow 0 + b \leqslant a + b$ ......[(iii)-லிருந்து]

இப்பொழுது $0 \leqslant b$ & $b \leqslant a + b \Longrightarrow 0 \leqslant a + b$ ( ii-லிருந்து)

அதாவது $a + b \in D^+$.

இவ்வாறு $a, b \in D^+ \Longrightarrow a + b \in D^+$ (3)

$a, b \in D^+$ என்க. எனவே $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b$.

எனவே $0 . b \leqslant a . b$ ......(iv-லிருந்து)

அதாவது $0 \leqslant a . b$ $[0 . b = 0 \quad \forall\, b \in D]$

அதாவது $ab \in D^+$

இவ்வாறு $a, b \in D^+ \Longrightarrow ab \in D^+$ (4)

(1), (2), (3), (4) ஆகியவற்றிலிருந்து (D, +, .) ஐ வரிசையிட முடியும் என்பதுவும், $D^+$, $D^-$ ஆகியவை முறையே மிகை மூலகங்கள் குறை மூலகங்கள் ஆகியவற்றைக் கொண்டுள்ள கணங்கள் என்பதுவும் விளங்கும்.

**2·14. தேற்றம்:** $(D, +, .)$ என்ற எண் அரங்கத்திலுள்ள '0' அல்லாத மூலகங்களை,

(i) $D^+$ என்பது, $D^-$-ல் உள்ள மூலகங்களின் எதிர் மறை (+-ன் கீழ்) களால் ஆனது,

(i) $a, b \in D^- \Longrightarrow a + b \in D^-$,

(iii) $a. b \in D^+ \Longrightarrow a, b \in D^+$ என்னும் விதிகளுக்கு உட்பட்டு $D^+$, $D^-$ என்னும் இரு உட்கணங்களாகப் பிரிக்க முடிந்தால் $(D, +, .)$ என்பதை வரிசைப்படுத்த முடியும்.

நிரூபணம்: $a$ என்பது +-ன் கீழ் $b$-ன் எதிர்மறை என்றல் $b$ என்பது +-ன் கீழ் $a$-ன் எதிர்மறை ஆகும். எனவே '$D^+$ என்பது $D^-$ல் உள்ள மூலகங்களின் எதிர்மறைகளால் ஆனது' என்றல் '$D^-$ என்பது $D^+$-ல் உள்ள மூலகங்களின் எதிர்மறைகளால் ஆனதாகும்.' ... ... (1)

$a, b \in D^+$ என்க.

இப்பொழுது $-a, -b \in D^-$ ( (i) -லிருந்து)

$\therefore \ (-a) + (-b) \in D^-$

[தேற்றத்தின் நிபந்தனை (ii) -லிருந்து]

அதாவது $-(a + b) \in D^-$

[வலயத்தில் $-(a + b) = (-a) + (-b)$ ]

$\therefore \ -[-(a + b)] \in D^+$

[தேற்றத்தின் நிபந்தனை (i) -லிருந்து]

அதாவது $a + b \in D^+$

இவ்வாறு $a, b \in D^+ \Longrightarrow a + b \in D^+$ ... ... (2)

(1), (2), (iii) ஆகியவற்றிலிருந்து $(D, +, .)$ என்பது வரிசைப் பட்ட எண் அரங்கமாகும்.

எல்லா எண் அரங்கங்களையும் வரிசைப்படுத்த முடியுமா என்றல், வரிசைப்படுத்த முடியாது என்பதே பதில். வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கங்களுக்கான குணங்களிலிருந்து சில எண் அரங்கங்களை வரிசைப்படுத்த முடியாது என்று நிறுவி விடலாம்.

**2.15. எ. கா. :** $(C, +, .)$ என்ற சிக்கல் எண்களின் எண் அரங்கத்தை வரிசைப்படுத்த முடியாது.

நிரூபணம் : $(C, +, .)$ ஐ வரிசையிட முடியும் என்க $C^+$, $C^-$ ஆகியவை முறையே மிகை, குறை மூலகங்களடங்கிய கணங்கள் என்க.

இப்பொழுது $i \in C$ & $i \neq 0$. எனவே $i \in C^+$ அல்லது $C^-$

$$i \in C^+ \Longrightarrow i.i = -1 \in C^+$$

[வரையறை 2.1, நிபந்தனை iii]

$$i \in C^- \Longrightarrow i.i = -1 \in C^+ \quad \text{[குணம் 2.12]}$$

எவ்வாறேனும் $-1 \in C^+$............(1)

$1 \in C$ & $1 \neq 0$. எனவே $1 \in C^+$ அல்லது $1 \in C^-$.

$1 \in C^- \Longrightarrow 1.1 = 1 \in C^+$ [குணம் 2.12]

எவ்வாறேனும் $1 \in C^+$.

எனவே $+$-ன் கீழ் 1-ன் எதிர்மறையான $-1 \in C^-$.........(2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $-1 \in C^+$ & $-1 \in C^-$.

இது குணம் 2·7-க்கு மாறுபாடாகும். (contradiction)

எனவே $(C, +, .)$ ஐ வரிசைப்படுத்த முடியாது (cannot be ordered).

**2·16. எ. கா. :** $(Z_p, +, .)$ என்பது $p$ வகுபடா (பகா) எண்ணாக இருக்கும்போது எண் அரங்கம் என்று படித்துள்ளோம். இதை வரிசைப்படுத்த முடியாது.

நிரூபணம் : $Z_p = \{0, 1, 2, ...., (p-1)\}$.

$(Z_p, +, .)$ஐ வரிசையிட முடிந்தால் வரிசையிடுதலுக்கான நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு $Z_p - \{0\}$-ன் மூலகங்களை $Z_p^+$, $Z_p^-$ என்னும் இரு உட்கணங்களாகப் பிரிக்க முடியும்.

$1 \neq 0$ என்ற $Z_p$-ன் மூலகத்தை எடுத்துக் கொள்க.

$1 \in Z_p^+$ அல்லது $1 \in Z_p^-$.

$1 \in Z_p^+ \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \in Z_p^+$ (வரையறை 2·1, நிபந்தனை iii)

$1 \in Z_p^- \longrightarrow 1 \cdot 1 = 1 \in Z_p^+$ (குணம் 2·11)

எவ்வாறேனும் $1 \in Z_p^+$.

$\therefore 1 + 1 = 2 \in Z_p^+$

இப்பொழுது $2, 1 \in Z_p^+ \Longrightarrow 2 + 1 = 3 \in Z_p^+$

இதுபோல் $Z_p$-ல் உள்ள அத்தனை மூலகங்களும் ($0$ உட்பட) $Z_p^+$-ல் உள்ளது என்று நிரூபிக்கலாம். அதாவது $0 \in Z_p^+$. இது மாறுபாடாகும்.

எனவே $(Z_p^+, +, .)$ ஐ வரிசைப்படுத்த முடியாது.

குறிப்பு : மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டை நிரூபித்த விதத்திலிருந்து முடியும் அளவு மூலகங்களைக் கொண்ட எந்த ஓர் எண் அரங்கத்தையும் வரிசைப்படுத்த முடியாது என்பதுபோல் தோன்றுகிறது. இதை நிரூபிக்க; அல்லது வரிசைப்படுத்த முடியும் என்பதற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு தருக.

## பயிற்சி

1. வரையறை 2·1-ல் உள்ள $D^+$, $D^-$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்தவரை $D^+ = \left\{ x \,/\, x \in D \ \& \ 0 < x \right\}$, $D^- = \left\{ x \,/\, x \in D \ \& \ x < 0 \right\}$ என்று நிரூபிக்க.

2. $a \in D \ \& \ a \neq 0 \Longrightarrow a^2 \in D^+$ என்று நிறுவுக.

3. $(D, +, .)$ என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் '$.$'-ன் கீழ் 1 என்ற அலகு இருந்தால் $0 < 1$ என்று நிரூபிக்க.

4. $a \in D^+, b \in D^-$ என்றால்,

   (i) $ab \in D^-$ என்று நிறுவுக.

   (ii) $a - b \in D^+$ என்று நிறுவுக.

   (iii) $b - a \in D^-$ என்று நிறுவுக.

   (iv) $a + b$ என்பது $\{0\}$, $D^+$, $D^-$ ஆகியவற்றுள் எதில் வேண்டுமானாலும் இருக்கலாம் என்பதற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக.

5. $a, b \in D^-$ என்றால் $a + b \in D^-$ என்று நிரூபிக்க.

6. (D, +, .) என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் '.'-ன் கீழ் 1 என்ற அலகு உள்ளது என்க. $0 < x < 1$ என்னும் படியாக $x$ என்னும் மூலகம் D-ல் இருக்க முடியுமா என்பதைக் காண்க. முடியும் என்றால் எடுத்துக்காட்டும் முடியாது என்றால் நிரூபணமும் தருக.

7. $a, b, c, d$ என்பவை (D, +, .) என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தின் மூலகங்கள் என்றால் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $b > 0 \Longrightarrow a + b > a$

(ii) $b < 0 \Longrightarrow a + b < a$

(iii) $a < b \;\&\; c < d \Longrightarrow a + c < b + d.$

(iv) $a < b \Longrightarrow -a > -b$

(v) $a < b \Longrightarrow c - a > c - b$

(vi) $a < b, a > 0, b > 0 \Longrightarrow a^2 < b^2$

(vii) $a > 0, b < 0 \Longrightarrow ab < 0$

(viii) $a < b \;\&\; c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

(ix) $ac < bc \;\&\; c > 0 \Longrightarrow a < b$

(x) $ac > bc \;\&\; c < 0 \Longrightarrow a < b$

8. (D, +, .) என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் '$\leq$' என்னும் தொடர்பை $a \leq b \Longleftrightarrow$ '$a < b$ அல்லது $a = b$' என்று வரையறுக்க.

(a) பின்வருவனவற்றுள் சரியானவற்றை நிரூபிக்க; தவறானவற்றிற்கு மேற்கோள் தருக.

(i) $\leq$ என்பது பிரதிபலிக்கும் தொடர்பு (reflexive relation)

(ii) $\leq$ என்பது சமச்சீர் தொடர்பு (symmetric relation)

(iii) $\leq$ என்பது கடத்தும் தொடர்பு (transitive relation)

(iv) $\leq$ என்பது சரிநிகர் தொடர்பு (equivalence relation)

(v) $a, b$ என்பவை $a \neq b$ என்னும்படியாக D-ல் உள்ள எவையேனும் இரு மூலகங்கள் என்றால், $a \leq b$, $b \leq a$ ஆகியவற்றுள் ஒன்று மட்டும் உண்மையாகும்.

(vi) $\leq$ என்பது வட்டத் தொடர்பு (cyclic relation). அதாவது $a \leq b \; \& \; b \leq c \Longrightarrow c \leq a$.

(vii) $\leq$ என்பது எதிர் சமச்சீர் தொடர்பு (anti-symmetric relation). அதாவது, $a \leq b \; \& \; b \leq a \Longrightarrow a = b$

(b) பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க :

(i) $a \leq b \Longleftrightarrow b - a \leq 0$

(ii) $a \leq b \; \& \; c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d$

(iii) $a < b \; \& \; c \leq d \Longrightarrow a + c < b + d$

(iv) $0 \leq a \; \& \; 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq ab$

(v) $0 \leq a < b \; \& \; 0 \leq c < d \Longrightarrow ac < bd$

(vi) $0 \leq a < 1 \; \& \; 0 \leq b < 1 \; ab < 1$.

[ 1 என்னும் அலகு இருந்தால்]

9. (D, +, .) என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் '.'-ன் கீழ் 1 என்ற அலகு உள்ளது என்றால் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

(i) $x > 0$ என்னும் மூலகத்திற்கு '.'-ன் கீழ் $x^{-1}$ என்ற எதிர்மறை இருந்தால் $x^{-1} > 0$.

(ii) $x > 1$ என்னும் மூலகத்திற்கு '.'-ன் கீழ் $x^{-1}$ என்ற எதிர்மறை இருந்தால் $x^{-1} < 1$

(iii) $0 < x < 1$ என்னும்படியாக உள்ள $x$ என்ற மூலகத்திற்கு '.'-ன் கீழ் $x^{-1}$ என்ற எதிர்மறை இருந்தால் $x^{-1} > 1$.

(iv) '$x < 1$ என்னும்படியாக உள்ள $x$ என்ற மூலகத்திற்கு '.'-ன் கீழ் $x^{-1}$ என்ற எதிர்மறை இருந்தால்

$x^{-1} > 1$ என்று கூறமுடியாது'' என்பதற்கு எடுத்துக்காட்டு தருக. [$(Q, +, .)$ என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தை எடுத்துக்கொள்ளலாம்.]

10. $a$ என்பது $(D, +, .)$ என்ற வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தின் ஏதேனும் ஒரு மூலகம் என்க. $|a|$ என்று குறிப்பிடப்படும் $a$-ன் தனிப் பெறுமானத்தை (absolute value)

$$\left.\begin{array}{l} a \geq 0 \text{ என்றால் } |a| = a \\ a < 0 \text{ என்றால் } |a| = -a \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad (A)$$

என்று வரையறுக்கலாம். $a, b, c$ என்பவை D-ன் மூலகங்களாக இருக்கும்போது பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க:

(i) $a \neq 0$ என்றால் $|a| > 0.$

(ii) $|a| = |-a|$

(iii) $-|a| \leq a \leq |a|$

(iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(v) $|a| - |b| \leq |a+b|$

(vi) $\Big| |a| - |b| \Big| \leq |a+b|$

(vii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(viii) '.' பரிமாற்று விதிக்கு உட்பட்டிருந்தால் $a^2+b^2$ $>2|ab|$

11. $(D, +, .)$ என்பது வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் என்க. இப்பொழுது $D \times D$-விருந்து $D^+ \cup \{O\}$-க்கு $d$ என்னும் சார்பை $d(x,y) = |y-x|$ என்று வரையறுக்கலாம். இவ்வாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ள சார்பு,

(i) $x \neq y$ என்றால் $d(x,y,) > O$
$x = y$ என்றால் $d(x,y) = O$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

என்னும் மூன்று விதிகளுக்கும் உட்பட்டிருக்கும் என்று நிறுவுக. இதில் (ii) ஆவது (iii) ஆவது குணங்களை முறையே சமச்சீர் தன்மை (Symmetric property), முக்கோணச் சமனிலி (Triangle inequality) என்பர். இம்மூன்று குணங்களையும் உடைய அக்கணத்தில் (இங்கு D-ல்) வரையறுக்கப்பட்ட தூரம் (Metric) எனப்படும்.

# V. இயற்கை எண்கள்

## [Natural Numbers]

### 1. இயற்கை எண்களின் அமைப்பு [Structure of natural numbers]

நாம் மிகவும் பழக்கப்பட்ட கணிதத் தொகுதி இயற்கை எண்கள் ஆகும். 1, 2, 3, 4,......என்ற எண்கள் மிகப் பழமையானவை. இந்த இயற்கை எண்களால் ஆன கணத்தை N என்று குறித்து அதன் பண்புகளைச் சிறிது பார்ப்போம்.

### 1·1. இயற்கணிதத்தின் அமைப்பு (Algebraic structure)

*(a)* N-ல் கூட்டல், பெருக்கல் எனும் இரு ஈருறுப்புச் செயல்கள் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன என்பது நமக்கு நன்கு தெரியும். அச் செயல்களின் கீழ் N அடைப்புள்ளது ஆகும்.

*(d)* N-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், சேர்ப்பு (Associative), பரிமாற்று (Commutative) நீக்கல் (Cancellation) விதிகளை நிறைவு செய்கிறது.

(அ-து.) $\forall\ a, b, c \in N,\quad a+[b+c]=[a+b]+c$

$$a+b=b+a$$

$$a+b=a+c \Longrightarrow b=c.$$

*(c)* N-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று, நீக்கல் விதிகளை நிறைவு செய்கிறது.

(அ-து.) $\forall\ a, b, c \in N,\quad a.(b.c)=(a.b).c$

$$a.b=b.a$$

$$a.b=a.c \Longrightarrow b=c$$

*(d)* கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன. [Distributive laws]

$\forall\ a, b, c \in N, \quad a.(b+c) = a.b + a.c$
$\qquad\qquad\qquad\quad (a+b).c \ = a.c + b.c$

(e) N-ல் பெருக்கல் அலகு (Multiplicative identity) உண்டு. அது எண் 1 ஆகும். $\forall\ x \in N,\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x.$ 1 ஐத் தவிர வேறு பெருக்கல் அலகு N இல் கிடையாது.

1·2. வரிசை அமைப்பு [Order Structure]

முழு எண்களின் *எண் அரங்கம் Z வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் (Ordered integral domain) என்று முன்பே அறிந்திருக்கிறோம், மேலும் Z-ல் '$a$ ஐவிடச் சிறியது $b$' $[a>b]$ எனும் தொடர்பு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. N ஐப் பொறுத்தவரை அத் தொடர்பு பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

(a) $a$, $b$ என்பவை எவையேனும் இரு இயற்கை எண்கள் எனின்,

$a>b$ அல்லது $a=b$ அல்லது $b>a$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாக இருக்கும். [Law of Trichotomy]

(b) $\forall\ a, b, c \in N, \quad a>b, b>c \Longrightarrow a>\bar{b},$ [கடத்தும் விதி [Law of Transitivity)]

(c) $\forall\ a, b, c \in N, \quad a>b \Longrightarrow a+c>b+c$ [Monotone property of addition]

(d) $\forall\ a, b, c \in N, \ a>b \Longrightarrow ac>bc$ [Monotone property of Multipcation]

1·3. நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மை [Well-orderd property]

ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தில் நன்கு வரிசைப்பட்ட கணம் எவ்வாறு வரையறுக்கப்படுகிறது என்பதை முதலில் காண்போம்.

**வரையறை:** ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் D-ன் S எனும் யாதாவதொரு உள் அடங்கு கணத்தின் (Subset) ஒவ்வொரு

---

*இனி வரும் பகுதிகளில் எண் அரங்கம் எனின் அதில் பெருக்கல் அலகு உள்ளதாகவும், பெருக்கல் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்வதாகவும் கொள்ளப்படுகிறது.

வெறுமையற்ற உள்அடங்கு கணமும் (Every non-empty Subset of S) ஒரு மிகக் குறைந்த உறுப்பைப் பெற்றிருந்தால், [a least element] கணம் S, நன்கு வரிசைப்பட்டது [Well-ordered] என வரையறுக்கப்படுகிறது.

*(அ-து.)* $\forall$ T $\subseteq$ S, $f$ $b \in$ T/$a \leq \bar{b}$ $\forall$ $a \in$ T எனின் S நன்கு வரிசைப்பட்டது ஆகும்.

முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கமாகும். அதில் இயற்கை எண்களால் ஆன கணம் N நன்கு வரிசைப்பட்டதாகும்.

குறிப்பு 1: ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் D-ல், நேர் உறுப்புகளால் ஆன கணம் [Set of positive elements of D] நன்கு வரிசைப்பட்டதாக இருந்தால் அந்த அரங்கம் நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கம் (Well ordered domain) எனப்படுகிறது.

குறிப்பு 2: முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z, நன்கு வரிசைப் பட்ட அரங்கமாகும். விகித முறு எண்களால் ஆன கணம் Q வரிசைப்பட்ட எண் அரங்க மாயிருந்தும், அதில் நேர் விகித முறு எண்களால் ஆன கணம் நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமல்ல. [ஏனெனில் $r$ என்பதுநேர்விகிதமுறுஎண்எனின் $\frac{r}{2}$ ஒரு நேர் விகித முறு எண்ணாகும். மேலும் $\frac{r}{2} < r$] இதே போன்று மெய்யெண்களால் ஆன கணம் R, வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கமாயிருந்தும் நன்கு வரிசைப் பட்ட அரங்கம் அல்ல.

**1·4. தேற்றம் :** D என்பது ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கமாகவும், அதில் உள்ள நேர் உறுப்புகளால் ஆன கணம் $D^+$ நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாகவும் இருக்கட்டும். $e$ என்பது D-ல் உள்ள பெருக்கல் அலகைக் குறிக்கிறது என்ருல், $D^+ = \left\{ me \,/\, m \in n \right\}$

$D = \left\{ ne \,/\, m \in n \right\}$ என்று எழுதலாம்.

நிருபணம் : $x$ என்பது $D^+$-ல் எந்த உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும். $x \in D^+$ ஆகையால் $x > 0$ ஆகும். [$0$ என்பது D-ன் கூட்டல் அலகைக் குறிக்கும்].

$e = e^2 > 0$ ∴ $e \in D^+$ [$a \in D, a \neq 0$ எனின் $a^2 \in D_+$ ஆகும். ... ... ... ... ... ... (1)

எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணிற்கும் $me \in D^+$ எனின், $(m + 1)e = me + e \in D^+$

∴ * முதல் தொடுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையின்படி, $\forall\ m \in N$, $me \in D^+$ ... ... ... ... (1)

$D^+$, நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாதலால், அதில் மிகக் குறைந்த உறுப்பு உண்டு. அந்த உறுப்பு $e$ என்கிறோம்.

அவ்வாறு இல்லாவிடில், $e$-ஐ விடக் குறைந்த, $D^+$-ல் உள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் வெறுமையற்ற கணமாகும். அதனை S என்று குறிப்போம். இதில் மிகக் குறைந்த உறுப்பு உண்டு. அதனை $x$ என்று குறிப்போம்.

∴ $0 < x < e$ ∴ $0 < x^2 < x \cdot e$
(அ-து.) $0 < x^2 < x$

$x < e$ ஆதலாலும் $x^2 < x$ ஆதலாலும் $x^2 < e$ ஆகும். ∴ $x^2 \in S$.

மேலும் $x^2 < x$. இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால் S என்பது வெறுமைக் கணமாகும்.

∴ $e$ என்பது $D^+$-ல் மிகக் குறைந்த உறுப்பு என்று தெரிகிறது. ... ... ... ... ... ... (2)

$D^+$-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $me$, [$m \in N$] என்று எழுதலாம் என்கிறோம். முடியாவிட்டால், அவ்வாறு எழுத முடியாத [$D^+$-ல் உள்ள] உறுப்புகளைக் கொண்ட கணத்தை S என்று குறிப்போம். $D^+$ நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாதலால், S-ல் மிகக் குறைந்த உறுப்பு உண்டு. அதனை $t$ என்று குறிப்போம். $D^+$-ல் மிகக் குறைந்த உறுப்பு $e$ ஆதலால், [ (2)-லிருந்து ] $t > e$ ஆகும்.

(அ-து) $t - e > 0$ ∴ $t - e \in D^+$

$e > 0$ ஆதலால், $t - e < t$ ஆகும். ∴ $t - e \notin S$.

---
* தேற்றம் 2·2 ஐப் பார்க்கவும்.

மேலும், $t - e \notin S$, $t - e \in D^+$ ஆதலால் $t - e = m_1 e$ $[m_1 \in N]$ என எழுதலாம்.

$$\therefore \; t = (m_1 + 1) e \quad [m_1 + 1 \in N]$$

S-ன் அமைப்புப்படி, இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால், $D^+$-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பையும் $me$ $[m \in N]$ என எழுதலாம். ... ... ... (3)

(1), (2) -லிருந்து $D^+ = \left\{ me \,/\, \in N\, m \right\}$ எனக் கிடைக்கும்

(ii) $a$ என்பது D-ல் உள்ள எந்த உறுப்பையும் குறிக்கட்டும்.

$a \in D^+$ அல்லது $a = 0$, அல்லது $-a \in D^+$—இவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாக இருக்கும். $a \in D$ எனின் $a = me$ $[m \in n]$

$a = 0$ எனின், $\quad a = 0.e \quad [0 \in Z]$

$-a \in D^+$ எனின் $\quad -a = m_1 e \quad [m_1 \in N]$

$$\therefore \; a = (-m_1) e \quad [-m_1 \in Z]$$

இம்மூன்று நிலைகளிலும் $a = ne$ $[n \in Z]$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகையால் D-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பையும் $ne$ $(n \in Z)$ என எழுதலாம். மேலும், $ne$ $[n \in Z]$ என்று ஒவ்வோர் உறுப்பையும் D-ல் இருக்கும் என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

$$\therefore D = \left\{ ne \,/\, n \in Z \right\}.$$

குறிப்பு: Z ஒரு நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கம். ஆதலால், மேற்கூறிய தேற்றத்தில் (2)-லிருந்து 1, N-ன் மிகக் குறைந்த எண் என்று தெரிகிறது. அதாவது 0-ற்கும் 1-க்கும் இடையில் இயற்கை எண் கிடையாது.

1·5. தேற்றம்: D, $D^1$ என்பவை வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கங்களாகவும், முறையே, அவற்றில் உள்ள நேர் உறுப்புகளால் ஆன கணங்கள் $D^+$, $D^{+\prime}$ நன்கு வரிசைப்பட்ட கணங்களாகவும் இருந்தால், $D \cong D'$ ஆகும்.

நிரூபணம்: $e$, $e'$ என்பவை முறையே D, $D'$-ல் உள்ள பெருக்கல் அலகுகளைக் குறிக்கட்டும்.

தேற்றம் 1·4-ன்படி, $D = \left\{ ne \,/\, n \in Z \right\}$

$D' = \left\{ ne' \,/\, n \in Z \right\}$-க்கும்

D-ல் உள்ள எந்த உறுப்பையும் $ne \, [n \in Z]$ என்று எழுதும் போது $n$ தனித்தன்மை வாய்ந்த (unique) தாகும். [ இம் முடிவு D'-க்கும் பொருந்தும் ] இல்லாவிடில், $x \in D$, $x = n_1 e = n_2 e$, $n_1, n_2, \in z$ ] $n_1 \neq n_2$ என்க.

$\therefore \; (n_1 - n_2) e = 0$

$n_1 \neq n_2$ ஆதலால், $n_1 > n_2$ என்போம். [ இதே போன்று $n_1 > n_1$ என்றாலும் நிரூபிக்கலாம். ]

$\therefore \; (n_1 > n_2) > 0 \qquad \therefore \; (n_1 - n_2) e \in D^+$

$\therefore \; (n_1 - n_2) e > 0$

இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால், $\forall \; x \in D$, $x = ne$,

[ $n \in Z$, $n$ தனித்தன்மை வாய்ந்த எண் ]

இதேபோன்று $\forall \; x' \in D' \;\; x^1 = ne^1$

[ $n \in Z$, $n$ தனித்தன்மை வாய்ந்த எண் ]

$f : ne \in D \Longrightarrow ne^1 \in D^1$ என்ற D-யிலிருந்து $D^1$-க்குச் செல்லும் அமைப்பு மாற்றம் $f$ஐ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = me$, $y = e$ என்பவை D-ல் எவையேனும் இரு உறுப்பு களாயிருந்து $f(x) = f(y)$ எனின்,

$f(me) = f(ne)$ ஆகும்.

$\Longrightarrow \; me^1 = ne^1$

$\Longrightarrow \; m = n \Longrightarrow me = ne \Longrightarrow x = y$

$\therefore$ $f$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும் ... (1)

$z$ என்பது $D^1$-ல் எந்த ஒரு உறுப்பாகவும் இருந்தால், $z = ke^1 \; k \in Z$ ஆகும்.

$\therefore \; f \, ke \in D = f \, ke \longrightarrow ke^1$

$\therefore$ $f$ என்பது முழு அமைப்பு மாற்றமாகும். ... ... (2)

$\forall\ x, y \in D\quad [x = me,\ y = ne$ என்க.]

$f(x+y) = f[me + ne] = f[\overline{m+n}\,e] = \overline{m+n}\,e'$

$= me' + ne' = f(x) + f(y)$

$f(x\,.\,y) = f[(me)\cdot(ne)] = f[(mn)e] = (mn)e'$

$= (me')(ne') = f(a)\cdot f(y).$

∴ $f$ என்பது D-லிருந்து D′-க்கு ஒரு புனல் சார்பு ஆகும். ... ... ... ... ... ... (3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து, $f$ என்பது D-லிருந்து, $D^1$-க்கு ஓர் ஓரினச் சார்பு ஆகும். (Isomorphism)

குறிப்பு : நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கில் ஓரினச் சார்பு வரை, ஒன்றே ஒன்றுதான் உண்டு என்பது மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து தெளிவாகிறது.

## 2. கணிதத்தின் தொகுப்பு ஆய்வு (Mathematical Induction)

**2·1. தேற்றம் :** A என்ற கணம் இயற்கை எண்களைக் கொண்ட ஒரு கணமாக இருக்கட்டும். (i) $1 \in A$ (ii) $\forall n \in A$, $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$ என்றால் $A = N$ ஆகும்.

**நிரூபணம் :** B என்ற கணம் பின்வருமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

$B = \{ t \in N / t \notin A\}$ , $B = \phi$ [வெறுமைக் கணம்] எனின் $A = N$ என்பது தெளிவு.

$B \neq \phi$ எனின், N நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாதலால், B-ல் மிகக் குறைந்த எண் ஒன்று உண்டு. இதனை $m$ எனக் கொள்வோம். .........(1)

∴ $m \in B$, $\forall\ t \in B$, $m < t$ ஆகும்.
மேலும் $m \in B$ ஆதலால் $m \notin A$ ஆகும். .........(2)

$1 \in A$ என்பது தரவு ஆதலால் $1 \notin B$ ∴ $m \neq 1$

∴ $m > 1$ [ ·4 குறிப்பு]

∴ $m - 1$ என்பது ஓர் இயற்கை எண்ணாகும்.

$m - 1 < m$ ஆதலால் $m - 1 \notin B$ [(1)-லிருந்து]

∴ $m - 1 \in A$ ∴ $m \in A$ [தரவின்படி, $n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$]

இது (2)-க்கு ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால் B வெறுமையற்ற கணம் எனக் கொண்டது தவறு.

$\therefore$ B = $\phi$ ஆகும். $\therefore$ A = N.

முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கை [First Principle of Finite Induction]

**2·2.** தேற்றம்: $\{S(n)/n \in N\}$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் '$n$'-க்கும், ஒரு கூற்று விதம் (proposition) கூற்றுகளைக் கொண்ட கணமாக இருக்கட்டும்.

i) S (1) என்ற கூற்று உண்மை,

ii) $\forall K \in N$, S (K) என்ற கூற்று உண்மையாக இருந்தால் S (K + 1) என்ற கூற்று உண்மையாக இருக்கும்

என்றால் S ($n$) என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாகும்.

நிரூபணம்: A = { $m \in N$ / S ($m$) என்ற கூற்று உண்மை } என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம்.

தரவின்படி, S (1) உண்மையாகும்.

$\therefore$ $1 \in A$.

மேலும் $\forall K \in N$, S (K) உண்மை எனின் S (K + 1) உண்மையாகும்.

(அ-து) $\forall K \in A$, $K \in A \Longrightarrow (K + 1) \in A$.

$\therefore$ கணம் A-ல் i) $1 \in A$

ii) $K \in A \Longrightarrow K+1 \in A, \forall K \in A$

$\therefore$ தேற்றம் 2·1 -ன்படி, A = N ஆகும்.

A—ன் அமைப்பிலிருந்து S ($m$) என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் '$m$'-க்கும் உண்மை என்பது தெளிவு.

குறிப்பு 1: தேற்றத்தில் கொடுக்கப்பட்ட இரு விதிகளும் தேவையானவை. ஏதாவது ஒன்று நிறைவு செய்யப்படாவிட்டாலும் முடிவு கிடைக்காது.

எடுத்துக் காட்டாக S ($n$) = {$n^2 + 4n + 1$ என்பது இரட்டைப்படை எண் }.

$S(1) = \{1^2 + 4 \times 1 + 1$ என்பது இரட்டைப்படை எண்$\}$ என்பது உண்மை.

S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம்.

(அ-து) $K^2 + 4k + 1$ என்பது இரட்டைப்படை எண்.

$S(K + 1) = (K + 1)^2 + 4(K + 1) + 1$

$= K^2 + 4K + 1 + 2K + 5$

= ஒற்றைப்படை எண் (∵ $K^2 + 4K + 1$ என்பது இரட்டைப்படை எண்)

∴ S (K + 1) என்பது உண்மையல்ல.

ஆகையால் இரண்டாவது விதி நிறைவு செய்யப்படவில்லை. ஆகவே முடிவும் உண்மையாக இராது. எடுத்துக் காட்டாக, S (2) = 13 ஒற்றைப்படை எண்.

எடுத்துக் காட்டு :

$$S(n) = [1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2 + 1]$$

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும் S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம்.

∴ $1 + 3 + 5 + \ldots + 2K - 1 = K^2 + 1$ ஆகும்.

$S(K + 1) = (1 + 3 + 5 + \ldots + 2K - 1) + 2K + 1$

$= (K^2 + 1) + 2K + 1 = (K + 1)^2 + 1$

∴ S (K + 1) என்பது உண்மை எனக் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து S (n) எல்லா n-க்கும் உண்மை எனக் கூற முடியாது. ஏனெனில் $S(1) = [1 = 1^2 + 1]$ என்பது உண்மையல்ல.

குறிப்பு 2 : இரண்டாவது விதியில் S (K) உண்மை $\Longrightarrow$ S (K + 1) உண்மை என்பது எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணை எடுத்துக் கொண்டாலும் உண்மையாக இருக்கவேண்டும். ஏதாவது ஓர் இயற்கை எண்ணுக்கு உண்மையாக இல்லாமல் இருந்தாலும் முடிவு கிடைக்காது. எடுத்துக்காட்டிற்கு, பயிற்சி 1, கணக்கு 10 ஐப் பார்க்கவும்.

குறிப்பு 3 : முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, தேர் முழு எண் அடுக்குக் குறிக்கான ஈருறுப்புத் தேற்றத்தையும் (Binomial theorem for positive integral index) வகைநுண் கணிதத்தில் லீபினியின் தேற்றத்தையும் (Leibnitz theorem in Differential calculus) நிரூபிக்கலாம்.

மாதிரி 1 : $10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5 = M(9) \quad [\forall n \in N]$ என நிறுவுக.

$S(n) = \{10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5$ என்பது $9$-ன் மடங்கு$\}$ $[n \in N]$ என்க.

$S(1) = \{10^1 + 3 \times 4^3 + 5$ என்பது $9$-ன் மடங்கு$\}$ என்பது உண்மை. .........(1)

$$[\because 10^1 + 3 \times 4^3 + 5 = 207 = 23 \times 9]$$

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும்,

S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad 10^k + 3 \cdot 4^{k+2} + 5 = 9t, \qquad [t \in N] ......(2)$$

$$\therefore \quad S(K+1) = 10^{k+1} + 3 \times 4^{k+3} + 5$$

$$= 10 \times 10 + 3 \times 4 \times 4^{k+2} + 5$$

$$= 10^k \times 10 + 12 \times 4^{k+2} + 9t - 3 \times 4^{k+2} - 10k$$

[(2) ஐப் பயன்படுத்தி]

$$= 10^k [10 - 1] + 4^{k+2} [12 - 3] + 9t$$

$$= 9 \times 10^k + 9 \times 4^{k+2} + 9t$$

$$= 9m \qquad [m \in N]$$

$\therefore$ S (K + 1) என்பது உண்மையாகும். .........(3)

(1) — (3) லிருந்தும், முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையின் படியும், $S(n)$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மை என முடிவு செய்யலாம். ஆகையால் $\forall n \in N$, $10^n + 3 \times 4^{n+2} + 5 = M(9)$.

மாதிரி 2 : $\forall n \in N$, $\sqrt{n}$ அலகு நீளத்தை அளவுகோல் [ruler], கவராயம் [compas] மட்டும் கொண்டு வரையலாம் என நிறுவுக.

நிரூபணம் : $S(n) = [n \in N$, $\sqrt{n}$ என்ற நீளத்தை அளவுகோல், கவராயம் மட்டும் கொண்டு வரையலாம்.]

S(1) என்பது உண்மை [ஏனெனில் $\sqrt{1} = 1$ அலகு நீளத்தை அளவுகோல் கவராயம் கொண்டு வரையலாம்] .........(1)

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும்,

S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம். .........(2)

அதாவது $\sqrt{K}$ அலகு நீளத்தை அளவுகோல், கவராயம் மட்டும் கொண்டு வரையலாம் என்பது கொள்கை.

AB என்பது $\sqrt{K}$ அலகு நீளமாகவும், B-லிருந்து AB-க்குச் செங்குத்தாக BC எனும் கோடு 1 அலகு நீளமுள்ளதாகவும் வரைக.

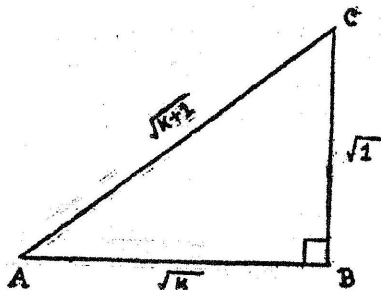
[அளவுகோல், கவராயம் மட்டும் கொண்டே இதனைச் செய்ய லாம்].

AC ஐச் சேர்க்கவும். $AC = \sqrt{K+1}$ அலகு ஆகும்.

ஆகையால் $\sqrt{K+1}$ அலகு நீளத்தை அளவு கோல், கவராயம் மட்டும் கொண்டு வரையலாம்.

ஆகையால் $S(K+1)$ என்பது உண்மை.

(1) — (3)-லிருந்தும், முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கை




படம் 23

யின்படியும், $S(n)$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாகும்.

$\therefore \forall n \in N$, $\sqrt{n}$ அலகு நீளத்தை அளவு கோல், கவராயம் மட்டும் கொண்டு வரையலாம்.

இரண்டாவது தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கை (Second Principle of Induction)

2·3. தேற்றம் : $\left\{ S(n) \,/\, n \in N \right\}$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் '$n$'-க்கும் ஒரு கூற்று வீதம் கூற்றுகளைக் கொண்ட கணமாக இருக்கும்.

(i) $S(1)$ என்பது உண்மை.

(ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும் [ K > 2 ] S (1)...... S (k − 1) என்பவை ஒவ்வொன்றும் உண்மையானால், S(K) உண்மை என்றால் $S(n)$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாக இருக்கும்.

நிருபணம் : $A = \left\{ n \in N \middle/ S(n) \text{ என்பது உண்மை} \right\}$,

$B = \left\{ m \in N \middle/ S(m) \text{ என்பது உண்மையல்ல} \right\}$

என்று அமைக்கப்பட்ட கணங்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

B ஒரு வெறுமைக் கணமாயின் (empty set) தேற்றத்தின் முடிவு வெளிப்படை.

B வெறுமையற்ற கணமாயின், N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மைப்படி, B-ல் மிகக் குறைந்த எண் உண்டு. அதனை $x$ எனக் கொள்வோம்.

∴ $x \in B$ ∴ $x \notin A$ ∴ $x \neq 1$ [∵ தரவின்படி, $S(1)$ உண்மையாதலால் $1 \in A$ ] ... ... ... (1)

∴ $x > 1$ [தேற்றம் 1·4 குறிப்பு ]

ஆகையால் $x$ ஐ விடக் குறைந்த இயற்கை எண் ஒன்றுவது உண்டு. $x$ ஐ விடக் குறைந்த இயற்கை எண்கள், B-ல் இருக்க முடியாதாதலால், அவை A-ல் இருக்கும். ∴ $1, \ldots\ldots, x-1$ ஆகிய இயற்கை எண்கள் A-ல் இருக்கும். ∴ A-ன் அமைப்புப்படி, S (1) ......S $(x-1)$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் உண்மை. ஆகையால் தரவின்படி, $S(x)$ என்பது உண்மை.

∴ $x \in A$ : இது (1)-க்கு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால் B ஒரு வெறுமையற்ற கணம் எனக் கொண்டது தவறு.

∴ B ஒரு வெறுமைக் கணமாகும்.

∴ $A = N$. ∴ $S(n)$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மை என்பது தெளிவு.

குறிப்பு: முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையும், இரண்டாவது தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையும் சரி நிகரானவை (equivalent) என நிரூபிக்கலாம்.

2·4. தொகுப்பு ஆய்வு முறை வரையறை (Inductive Definition or Recursive Definition)

(1) $a^n$ ஐ வரையறுத்தல் [$n \in N$]

ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் $a$ என்பது யாதாவது ஓர் உறுப்பாக வும், $n$ என்பது எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணாகவும் இருக்கட்டும். $a^n$ என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது:

i) $a^1 = a$ ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும், $a^k$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் $a^{k+1} = a^k \times a$ என்ற முறையில் $a^{k+1}$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

$a^n$ எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபிப்போம்.

S ($n$) = {$a^n$ என்பது இயற்கை எண் $n$-க்கு வரையறுக்கப் பட்டது} என்க.

S (1) என்பது உண்மை.

S (K) உண்மையானால் S (K + 1) உண்மையாகும் [(ii)-லி ருந்து]. ஆகையால் முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையின்படி, S ($n$) என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மை.

(அ-து) $a^n$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் வரை யறுக்கப்பட்டது.

2·5. காரணியக் குறியீட்டு முறை (Factorial Notation) வரையறை

(i) $1! = 1$ (ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும், K ! என்பது வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் $(K+1)! = (K!)\ (K+1)$ என்ற முறையில் $(K+1)!$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதிலிருந்து முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன் படுத்தி, எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் $n$ ! வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபிக்கலாம்.

3. கூட்டுத் தொடரை வரையறுத்தல் (Defining an Arithmetic sequence)

$a$ ஐ முதல் உறுப்பாகவும் $d$ ஐப் பொது வித்தியாசமாகவும் (common difference) கொண்ட ஒரு கூட்டுத் தொடர் {$a_n$} ஐப் பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

(i) $a_1 = a$ (ii எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும் $a_k$ வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் $a_{k+1} = a_k + d$ என்ற முறையில் $a_{k+1}$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதிலிருந்து முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும், $a_n$ வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபிக்கலாம். (அ-து) அத் தொடரில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் வரையறுக்கப்பட்டது.

## 4. பெருக்குத் தொடரை வரையறுத்தல் [Defining a Geometric Sequence]

$a$ ஐ முதல் உறுப்பு ஆகவும், $r$ ஐப் பொது விகிதமாகவும் (common ratio) கொண்ட ஒரு பெருக்குத் தொடர் $\{a_n\}$ ஐப் பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்:

i) $a_1 = a$, ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும், $a_k$ வரையறுக்கப்பட்டதாயிருந்தால், $a_{k+1} = r \cdot a_k$ என்ற முறையில் $a_{k+1}$ வரையறுக்கப்படுகிறது. இதிலிருந்து, முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் $a_n$ வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபிக்கலாம். (அ-து) அத்தொடரில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் வரையறுக்கப்பட்டது.

## 5. பொதுச் சேர்ப்பு விதி [General Associative law]

முதலில், ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் பல உறுப்புகளின் கூட்டல் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

i) $a_1, a_2 \in D$ எனின் $a_1 + a_2$ என்பது வரையறுக்கப்பட்ட ஒன்றாகும். [மேலும் $a_1 + a_2 \in D$ ஆகும்.]

ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும், $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_k$ என்பது வரையறுக்கப்பட்டதாயிருந்தால், $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}$ என்பது $a_1 + a_2 \ldots + a_k + a_{k+1} = [a_1 + a_2 + \ldots + a_k] + a_{k+1}$; $[a_1, a_2, \ldots a_k, a_{k+1} \in D]$ என்ற முறையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் $a_1 + a_2 \ldots + a_n$ வரையறுக்கப்பட்டது என நிரூபிக்கலாம்.

$a_1, a_2, \ldots a_r, \ldots a_n$ என்பவை D-ல் உள்ள உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்- $[1 \leq r < n$; $r$, $n$ என்பவை இயற்கை எண்கள்.]

$S(n) = \{ (a_1 + \dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots + a_n) = a_1 + \dots + a_n \}$ எனக் கொள்வோம்.

$S(1)$, $S(2)$ என்பவை உண்மை என்பது வெளிப்படை ... (2)

$S(3) = (a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$ [சேர்ப்பு விதி]
{$r = 2$ என்றால்}

$= a_1 + (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3$ [சேர்ப்பு விதி]
{$r = 1$ என்றால்}

∴ $S(3)$ என்பது உண்மை.

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும்,

$S(K)$ உண்மை எனக் கொள்வோம்.

(அ - து) $(a_1 + \dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots + a_k) = a_1 + \dots + a_k \; [1 \leq r < K]$ .........(3)

$1 \leq r < K + 1$ எனின்,

$(a_1 + \dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots + a_{k+1}) = a_1 + \dots + a_{k+1}$ என நிரூபிக்க வேண்டும்.

$r = k$ எனின் இடப் பக்கம் $= (a_1 + \dots\dots + a_k) + a_{k+1}$

$= a_1 + \dots\dots + a_{k+1}$ [பல உறுப்புகளின் கூட்டல் வரையறையிலிருந்து]

$r < k$ எனின்

$(a_1 + \dots\dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots\dots + a_{k+1})$

$= (a_1 + \dots + a_r) + \{ (a_{r+1} + \dots + a_k) + a_{k+1} \}$

$= \{(a_1 + \dots\dots + a_r) + (a_{r+1} + \dots + a_k)\} + a_{k+1}$
[சேர்ப்பு விதிப்படி]

$= \{a_1 + \dots + a_k\} + a_{k+1}$ [(3)-லிருந்து]

$= a_1 + \dots + a_{k+1}$ .........(4)

(2), (3), (4)-லிருந்தும், முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கைப்படியும், $S(n)$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு: இதே போன்று பொதுப் பங்கீட்டு விதியையும் [General Distributive law] நிரூபிக்கலாம். (அ - து) $a, b_1, b_2 \dots$

$b_n \in D$ எனின் $a \cdot [b_1 + \ldots\ldots + b_n] = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \ldots + a \cdot b_n$. இது பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

**2·5. தேற்றம் :** $a$, $b$ என்பவை ஓர் எண் அரங்கம் D-ல், எவையேனும் இரு உறுப்புகளாகவும், $m$, $n$ என்பவை இயற்கை எண்களாகவும் இருந்தால்,

i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ iii) $a^m b^m = (ab)^m$

நிரூபணம் : i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

S $(n)$ = {$n$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட இயற்கை எண்ணிற்கு $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $m$-க்கும் உண்மை} என்க.

எந்த ஓர் இயற்கை எண் $m$-க்கும், $a^m \cdot a^1 = a^{m+1}$

[வரையறை 1, 2·4]

∴ S (1) உண்மையாகும். .........(1)

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும்,

S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம்.

K என்பது ஏதாவதோர் இயற்கை எண்ணாக இருந்தால்,

(அ-து) ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $m$-க்கும், $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ .........(2)

ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $m$-க்கும், $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot [a^k \cdot a]$

$$= [a^m \cdot a^k]\, a$$
$$= a^{m+k} \cdot a$$
$$= a^{(m+k)+1} = a^{m+(k+1)}$$

∴ S (K + 1) என்பது உண்மையாகும். .........(3)

(1), (3)-லிருந்தும், முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையின் படியும், S $(n)$ என்பது ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாகும்.

∴ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

ii), iii) ஆகியவை பயிற்சியாக விடப்படுகின்றன.

### பயிற்சி

தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையை உபயோகித்துப் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

(ii) $1^2+2^2+3^2+ \ldots\ldots +n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(iii) $1^3+2^3+3^3+ \ldots\ldots +n^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$

(iv) $1+3+5+\ldots\ldots+(2n-1) = n^2$

(v) $3^{2n} + 2n - 1 = \mathrm{M}(32)$

(vi) $8^{n+1} - 7n + 41 = \mathrm{M}(49)$

(vii) $11^{n+1} + 12^{2n-1} = \mathrm{M}(133)$

(viii) $n > 4$ எனின் $2^n < n!$

(ix) $1 + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}\ [n > 2]$

(x) $2\cdot4 + 4\cdot6 + 6\cdot8 + \ldots\ldots + 2n(2n+2)$

$$= \frac{4n}{3}(n+1)(n+2)$$

(xi) $4\cdot7 + 6\cdot9 + 8\cdot11 + \ldots\ldots + (2n+2)(2n+5)$

$$= \frac{4n^3 + 27n^2 + 53n}{3}$$

(xii) $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots\ldots + \sin n\alpha$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\ [\alpha \neq 2r\pi]$$

(xiii) $1 + 2 + \ldots\ldots + n < \frac{1}{2}(n+1)^2$

2. இரு அடுத்தடுத்த இயற்கை எண்களின் பெருக்கல் 2 ஆல் வகுபடும் என்றும், மூன்று அடுத்தடுத்த இயற்கை எண்களின் பெருக்கல் 6 ஆல் வகுபடும் என்றும், நான்கு அடுத்தடுத்த இயற்கை எண்களின் பெருக்கல் 24 ஆல் வகுபடும் என்றும் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி நிரூபிக்க.

3. மூன்று அடுத்தத்த எண்களின் மூன்றுவது படிகளின் கூட்டல் 9 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

4. 9-ன் மடங்காக உள்ள எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணின் இலக்கங்களின் கூடுதலும் 9 ஆல் வகுபடும் என நிரூபிக்க.

5. X என்பது $n$ உறுப்புகளைக் கொண்ட [$n$ என்பது முடிவுள்ள இயற்கை எண்] கணமாயின், P [X]-ல் (Power set of X) $2^n$ உறுப்புகள் இருக்குமெனத் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி நிறுவுக.

6. $n$ என்பது ஓர் இயற்கை எண், $a_1$, $a_2 \ldots\ldots a_n$ என்பவை ஓர் எண் அரங்கத்தில் எவையேனும் $n$ உறுப்புகள். $a_1 . a_2 \ldots\ldots a_n = 0$ எனின், ஏதாவது ஒரு $a_i$ ஆவது $(1 \leq i \leq n)$ 0 ஆக இருக்கும் என நிரூபிக்க.

7. $a, b$ என்பவை ஒரு வளையத்தில் (ring) எவையேனும் இரு உறுப்புகளாகவும், $m, n$ என்பவை எவையேனும் இரு முழு எண்களாகவும் இருந்தால், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $m(a + b) = ma + mb$

(ii) $(m + n)a = ma + na$

(iii) $m(ab) = (ma)b = a(mb)$

8. எந்த ஓர் இயற்கை எண் '$n$'-க்கும்

$$S(n) = \left\{ 1 + 2 + \ldots\ldots + n = \frac{(n+2)^2 - 3n}{4} \right\}$$

S (K) உண்மை எனின், S (K+1) உண்மை என நிறுவுக. ஆனால் S ($n$) எந்த ஓர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையல்ல. ஏன் ?

9. N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மையைப் பயன்படுத்தாது, முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்தி, 0-க்கும், 1-க்கும் இடையில் இயற்கை எண் கிடையாது என நிறுவுக. $\left[ S(n) = \left\{ n > 1 \,/\, n \in N \right\} \right.$ எனக் கொள்க.]

# 3. பியானோவின் அடிப்படைக் கொள்கைகள்

**(The Peano Axioms)**

**3·1.** முழு எண்கள் ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தை (ordered integral domain) அமைக்கின்றன என்றும், அதன் உள் அடங்கு கணமான, இயற்கை எண்களைக் கொண்ட கணம் N, நன்கு வரிசைப்பட்டது (Well ordered) என்றும் அறிந்திருக்கிறோம். இயற்கை எண்களால் ஆன கணம் N-ன் சில பண்புகளை அடிப் படைக் கொள்கைகளாகக் கொண்டு (axioms) N-ன் பிற பண்பு களை நிரூபிக்கலாம் என்று இத்தாலிய கணித நிபுணர் G. பியானோ [ Giuseppe Peano (1858—1932) ] முதன் முதலாகக் காண்பித் தார். இவ்வாறு இயற்கை எண்களால் ஆன கணத்தை அடிப் படைக் கொள்கைகளைக் கொண்டு அமைக்கப்பட்ட தொகுதியாகக் (axiomatic system) கருதிய பெருமை பியானோவைச் சாரும்.

பியானோவின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் பின்வருமாறு :

அடிப்படைக் கொள்கை 1. $1 \in N$

,, ,, 2. N-ல் உள்ள ஒவ்வோர் இயற்கை எண் $n$-க்கும் $n'$ என்ற N-ல் உள்ள ஒரே ஓர் எண் தொடர்பு படுத்தப் படுகிறது. $n'$ என்பது $n$-ன் பின் வரும் எண் [successor of $n$] எனப் படுகிறது.

,, ,, 3. N-ல் உள்ள எந்த எண்ணும் $n' = 1$ என்பதை நிறைவு செய்யாது.

,, ,, 4. $\forall\, m, n \in N,\ m' = n' \Longrightarrow m = n.$

அடிப்படைக் கொள்கை 5. P என்பது N-ன் யாதாவதோர் உள் அடங்கு கணமாக (subset) இருக்கட்டும்.

$1 \in P, x \in P \Longrightarrow x' \in P$
$[\forall x \in P]$ என்றால் $P = N$ ஆகும்.

விளக்கம் :

முதல் கொள்கை, N வெறுமைக் கணமல்ல என்று உறுதிப் படுத்துகிறது. இரண்டாவது கொள்கை N-லிருந்து அதற்கே ஓர் அமைப்பு மாற்றத்தை (mapping) வரையறுக்கிறது. அவ்வமைப்பு மாற்றம் ஒரு முழு அமைப்பு மாற்றமல்ல என்று மூன்றாவது கொள்கையும், ஆனால் ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றம் என நான்காவது கொள்கையும் வலியுறுத்துகின்றன. ஐந்தாவது கொள்கை மிக முக்கியமானதொன்றாகும். இது தொகுப்பு ஆய்வு அடிப்படைக் கொள்கை (Induction axiom) எனப்படுகிறது. இக் கொள்கையை 2·1 தேற்றத்தில் பார்த்திருக்கிறோம். முதல், இரண்டாவது தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கைகளுக்கு ஆதாரமாயுள்ள இத் தேற்றம் இங்கு அடிப்படைக் கொள்கையாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.

3·2. மேற்கூறிய அடிப்படைக் கொள்கைகளை ஆதாரமாகக் கொண்டு N-ல் கூட்டலை வரையறுத்தல்

வரையறை : $n$ என்பது N-ல் யாதானும் ஓர் எண்ணாக இருக்கட்டும்.

(i) $n + 1 = n'$ (ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் $k$-க்கும், $n + k$ வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால், $n+(k+1) = (n+k)'$ என்ற முறையில் $n+(k+1)$ வரையறுக்கப்படுகிறது என்றால்,

அடிப்படைக் கொள்கை 5-லிருந்து, $n + m$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $m$-க்கும் வரையறுக்கப்பட்டது என்பது தெளிவு.

3·3. அடிப்படைக் கொள்கைகளைக் கொண்டு N-ல் பெருக்கலை வரையறுத்தல்

வரையறை : $n$ என்பது N-ல் யாதானும் ஓர் எண்ணாக இருக்கட்டும்.

i) $n \cdot 1 = n.$

ii) எந்த ஓர் இயற்கை எண் $k$-க்கும், $n \cdot k$ வரையறுக்கப்பட்டிருந்தால் $n \cdot (k+1) = n \cdot k + n$ என்ற முறையில் $n \cdot (k+1)$ வரையறுக்கப்படுகின்றது என்றால்,

அடிப்படைக் கொள்கை 5-லிருந்தும், கூட்டல் வரையறையிலிருந்தும் $n \cdot m$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $m$-க்கும் வரையறுக்கப்பட்டது என்பது தெளிவு.

## 3·4. ">" எனும் தொடர்பை N-ல் வரையறுத்தல்

$m, n$ என்பவை N-ன் எவையேனும் இரு எண்களாக இருக்கட்டும். $\exists K \in N \mid m = n + k$ எனின் $m > n$ என்று கூறுகிறோம். '>' என்ற தொடர்புக்குரிய, முன்பு அறிந்த, எல்லாப் பண்புகளையும் இங்கும் நிருபிக்கலாம்.

அடிப்படைக் கொள்கை 5 ஐக் கொண்டு, பயிற்சி 1, கணக்கு 9-ல் கூறியவாறு 0-க்கும் 1-க்கும் இடையில் இயற்கை எண் இல்லை எனவும் அதனைக்கொண்டு N நன்கு வரிசைப்பட்டது எனவும் நிறுவலாம். மேலும் N-ல் கூட்டல் அலகு இராது எனவும், N-ல் உள்ள எந்த ஓர் உறுப்பிற்கும் கூட்டல் எதிர்மறை N-ல் கிடையாது எனவும் நிருபிக்கலாம். N-ன் பிற பண்புகளையும் நிருபிக்கலாம். இவை பயிற்சியாக விடப்படுகின்றன.

## 3·5. இயற்கை எண்களைக் கொண்ட கணத்திலிருந்து, முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z ஐ அமைத்தல் [Construction of integers from the natural numbers]

இயற்கை எண்களால் ஆன கணம் N, நல்ல அம்சங்களைப் பெற்றிருந்தாலும் அது முற்றுப் பெறவில்லை. ஒரு சாதாரணச் சமன்பாடு $x+1=1$ $[x \in N]$ என்பதைக் கூட N-ல் தீர்க்க முடியவில்லை. இதற்குக் காரணம் N-ல் கூட்டல் அலகும் இல்லை. N-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்குக் கூட்டல் எதிர்மறையும் N-ல் இல்லை. இத்தடையை நீக்கி, ஒரு புதிய கணத்தை அமைப்பது அவசியமாகிறது அப்புதிய கணமே முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z ஆகும். அதை அமைப்பதற்குப் பின்வரும் முறை கடைப்பிடிக்கப்படுகிறது.

முறை [Method]

N-லிருந்து S என்ற கணம் பின்வருமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

$S = \left\{ \text{வரிசைப்பட்ட ஜோடி } (a, b) \middle/ a, b \in N \right\}$ கணம்
S–ல், ~ என்று குறிக்கப்படும் தொடர்பு பின்வரும் வகையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\forall (a,b), (c,d) \in s, \quad (a,b) \sim (c,d) \iff a+d=b+c.$ இத் தொடர்பு ஒரு சரி நிகர்த் தொடர்பு (Equivalence relation) ஆகும்.

[ஏனெனில், $a+b=b+a$ ஆதலால், $(a, b) \sim (a, b)$

[ $\therefore$ ~ , பிரதிபலிக்கும் தன்மை உடையது.]

$(a, b) \sim (c, d)$ எனின் $a+d = b+c$

$\therefore \; c+b=d+a \quad \therefore (c, d) \sim (a, b)$

$\therefore$ ~, சமச்சீர்த் தன்மை உடையது.

$(a, b) \sim (c, d), \; (c, d) \sim (e, f)$ என்றால்,

$a + d = b + c, \; c + f = d + e$ ஆகும்.

$\therefore \; a + d + f = b + c + f$

$\therefore \; a + d + f = b + d + e$

$\therefore \; a + f + d = b + e + d$

$\therefore \; a + f = b + e \quad \therefore \; (a, b) \sim (e, f)$

$\therefore$ ~, கடத்தும் தன்மையுடையது.

$\therefore$ ~ என்பது ஒரு சரி நிகர்த் தொடர்பு ஆகும்.]

இச் சரி நிகர்த் தொடர்பு, S ஐ ஒன்றுக்கொன்று பிரிந்த சரி நிகர் வகுப்புகளாகப் பிளவுபடுத்துகிறது. (S is partitioned into disjoint equivalence classes). ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று சரி நிகராகும்.

$(a, b)$ ஐக் கொண்டிருக்கும் வகுப்பை $[a - b]$ என்று குறியீடு செய்வோம்.

$$\therefore \; [a - b] = \left\{ (x, y) \in s \middle/ x, y \in N, x+b=y+a \right\}$$

கணம் S-ன் எல்லாச் சரிநிகர் வகுப்புகளையும் கொண்ட கணத்தை I என்று குறிப்போம். $\therefore I = \{ [a - b], \ldots\ldots \}$

I ஓர் எண் அரங்கம் என்றும் N ஐ அதில் பதிக்கலாம் (embed) என்றும் நிறுவவேண்டும்.

I-ல் கூட்டலும், பெருக்கலும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகின்றன.

$$\forall \ [a-b], [c-d] \in I, \ [a-b] \oplus [c-d]$$

$$= [(a+c)-(b+d)]$$

$$[a-b] \odot [c-d]$$

$$= [(ac+bd) - (ad+bc)]$$

$(a+c, b+d) \in S$, $(ac+bd, ad+bc) \in S$ ஆதலால்,

$[(a+c)-(b+d)]$, $[(ac+bd)-(ad+bc)] \in I$ ஆகையால், கணம் I அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலுக்கும், பெருக்கலுக்கும் அமைப்புள்ளது. மேலும் கூட்டலும் பெருக்கலும் வகுப்புகளுக்கிடையே வரையறுக்கப்பட்டவை. அவை அவ் வகுப்புகளில் உள்ள உறுப்புகளைச் சார்ந்து இல்லை. கூட்டலும், பெருக்கலும் I-ல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டனவாகும் (Well defined) எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

கூட்டல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்யும் என எளிதாக நிறுவலாம்.

$[1-1]$ என்ற I-ல் உள்ள உறுப்பு I-ல் கூட்டல் அலகு ஆகும். ஏனெனில் $[a-b] \in I$ என்றால்,

$$[a-b] \oplus [1-1]$$

$$= [(a+1)-(b+1)]$$

$$= [a-b] \quad \{\because (a+1, b+1) \sim (a, b)\}$$

இதேபோன்று $[1-1] \oplus [a-b] = [a-b]$ என்றும் நிறுவலாம்.

$[b-a]$ என்ற I-ல் உள்ள உறுப்பு $[a-b]$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும். ஏனெனில்,

$$[b-a] \oplus [a-b] = [(b+a)-(a+b)]$$

$$= [(a+b)-(a+b)]$$

$$= [1-1] \quad \{\because (a+b, a+b) \sim (1, 1)\}$$

ஃ I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின் கீழ், I ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும்.

I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல் சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்யும் என நிரூபிக்கலாம். மேலும் கூட்டலும், பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்யும் எனவும் நிறுவலாம்.

$[2 - 1]$ என்ற I-ல் உள்ள உறுப்பு I-ன் பெருக்கல் அலகு ஆகும். மேலும் I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல், நீக்கல் விதியை நிறைவு செய்கிறது எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

ஆகையால் I ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

$N' = \left\{ [(x+1)-1] \big/ x \in N \right\}$ என்பது I-ன் உள் அடங்கு கணமாகும். $\forall x \in N, f: x \in N \rightarrow [(x+1)-1] \in N'$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் N-லிருந்து N′-க்கு ஒரு முழு ஓரினச் சார்பு (Onto Isomorphism) என நிறுவலாம்.

$b + x = a,\ x \in N$ என்று இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, $[a - b]$ என்ற I-ல் உள்ள உறுப்பு நேர் உறுப்பு (positive element) என வரையறுக்கப்படுகிறது. வரையறையிலிருந்து N′ என்ற கணம் I-ல் உள்ள எல்லா நேர் உறுப்புகளாலும் அமைக்கப்பட்ட கணம் என நிரூபிக்கலாம். மேலும் $N' \cong N$ ஆகலால் N′ என்ற கணம், I-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளதாகும்.

$[a - b]$ என்பது I-ல் எந்த உறுப்பாக இருந்தாலும்,

$a - b \in N'$ $[a > b$ என்றால்$]$, $a - b = 0$ $[a = b$ என்றால், $\{0,$ என்பது I-ன் கூட்டல் அலகைக் குறிக்கும்.$\}$

$[b - a] = -[a - b] \in N'$ $[b > a$ என்றால்$]$

மேற்கூறியவைகளிலிருந்து I ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கம் என்பது தெளிவு. N என்பது நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாதலாலும், $N \cong N'$ ஆதலாலும் N′ என்பது நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாகும்.

இவ்வாறு இயற்கை எண்களால் ஆன கணம் N-லிருந்து, ஒரு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கத்தை அமைத்து அதில் N ஐப் பதிக்கலாம் (embed) என்பது தெரிகிறது.

## 3·6. முழு எண்களின் அமைப்பு [Structure of Integers]

### 1. இயற்கணிதத்தின் அமைப்பு (Algebraic Structure)

முழு எண்களால் ஆன கணத்தை Z என்று குறிப்போம்.

(a) Z-ல் கூட்டல், பெருக்கல் எனும் இரு ஈருறுப்புச் செயல்கள் (Two binary operations) வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. அச்செயல்களின் கீழ் Z அடைப்புள்ளது (closed) ஆகும்.

(b) Z-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், சேர்ப்பு (Associative), பரிமாற்று (commutative), நீக்கல் (cancellation) விதிகளை நிறைவு செய்கிறது.

(அ-து) $\forall\ a, b, c \in Z$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + b = b + a$$

$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c.$$

(c) Z-ல் ஒரே ஒரு கூட்டல் அலகு [additive identity] உண்டு. அது 0 ஆகும். $\forall\ x \in Z \qquad x + 0 = 0 + x = x.$

(d) Z-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் ஒரே ஒரு கூட்டல் எதிர்மறை Z-ல் உண்டு. [additive inverse] (அ-து) $x$ என்பது Z-ல் எந்த எண்ணாக இருந்தாலும் $-x$ என்ற எண் Z-ல் உள்ளது. மேலும் $x + (-x) = (-x) + x = 0$ [இவையே எதிர் முழு எண்களாகும்.]

[சுருக்கமாகச் சொன்னால் Z, அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின்கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவை அமைக்கிறது.]

(e) Z-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று, நீக்கல் விதிகளை நிறைவு செய்கிறது.(அ-து) $\forall\ a, b, c \in Z$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c, [a \neq 0]$$

(f) Z-ல் ஒரே ஒரு பெருக்கல் அலகு [Multiplicative Identity] உண்டு. அது எண் 1 ஆகும். $\forall\ x \in Z, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$

(g) கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை (Distributive laws) நிறைவு செய்கின்றன. (அ-து) $\forall\ a, b, c \in Z,$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

## 2. வரிசை அமைப்பு [Order structure]

Z-ல் உள்ள 0 அல்லாத எண்களைப் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கும்படியாக $Z^+$, $Z^-$ எனும் இரு உள்ளடங்கு கணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) $Z^-$ என்பது $Z^+$-ல் உள்ள எண்களின் கூட்டல் எதிர் மறைகளால் ஆனது.

(ii) $\forall\, a, b \in Z^+, \quad a + b \in Z^+, \quad a \cdot b \in Z^+$

இதிலிருந்து $a$, $b$ என்பவை Z-ல் எவையேனும் இரு எண்கள் எனின், '$a$ ஐ விடச் சிறியது $b$' $[a > b]$ எனும் தொடர்பு '$a$ ஐ விடச் சிறியது $b$' என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இத் தொடர்பு $\Longleftrightarrow a - b \in Z^+$ பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

(a) $a$, $b$ என்பவை எவையேனும் இரு முழு எண்கள் ஆயின் $a > b$ அல்லது $a = b$, அல்லது $b > a$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாக இருக்கும் [Law of Trichotomy].

(b) $\forall\, a, b, c \in Z \quad a > b, b > c \Longrightarrow a > c$
[கடத்தும் விதி (Law of Transitivity)]

(c) $\forall\, a, b, c \in Z \quad a > b \Longrightarrow a + c > b + c$
[Monotone property of Addition]

(d) $\forall\, a, b, c \in Z \quad a > b, c > 0 \Longrightarrow ac > bc$
[Monotone property of Multiplication]

(e) $x \in Z, \quad x > 0$ எனின், $x$ என்பது நேர் முழு எண் என்றும் [Positive integer], $0 > x$ எனின் $x$ என்பது எதிர் முழு எண் என்றும் [negative integer] அழைக்கப்படுகிறது.

(f) $x$ என்பது Z-ல் எந்த எண்ணாக இருந்தாலும், $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாக இருக்கும்.

(g) $0 > x$, $0 > y\ [x, y \in Z]$ எனின் $0 > x + y$ ஆகும். மேலும் $xy > 0$ ஆகும்.

(h) $\forall\ a, b, c \in Z, a > b, 0 > c \Longrightarrow bc > ac$.

(i) $a \geqslant by\ [a, y \in z]$ என்றால் $a > y$ அல்லது $a = y$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாகும். மேலும் இவ்வாறு இருந்தால் $a \geqslant y$ என்கிறோம்.

3. தனிப் பெறுமானம் [Absolute Value]

$\forall\ a \in z$, $| a |$ என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$a > 0$ அல்லது $a = 0$ எனின் $| a | = a$

$0 > a$ எனின் $| a | = - a$

$| a |$ என்பது $a$-ன் தனிப் பெறுமானம் எனப்படுகிறது.

(i) $a \neq 0$ எனின் $| a | > 0\ [a \in z]$

(ii) $| a | = | - a |\quad [a \in z]$

(iii) $| a | + | b | > | a+b |$ அல்லது $| a | + | b | = | a+b |\ [\forall\ a, b \in z]$

(iv) $| a + b | > \big|\, | a | - | b |\, \big|$ அல்லது $| a + b | = \big|\, | a | - | b |\, \big|\ [\forall\ a, b \in z]$

(v) $| a . b | = | a | . | b |\quad [a, b \in z]$

(iv) $| a | > a$ அல்லது $| a | = a\ [a \in z]$, $a > - | a |$ அல்லது $a = - | a |\ [a \in z]$

4. நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கம் (Well ordered domain)

**Z-ன் உள் அடங்கு கணமான இயற்கை எண்களாலான கணம் N நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமாதலால், Z நன்கு வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கமாகும்.**

## 4. வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கு (Division Algorithm)

### 4·1. வகுக்கும் தன்மை (Divisibility)

ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் $a$, $b$ என்பவை எவையேனும் இரு பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $b = aq$, $q \in D$ என்று இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, '$a$ என்பது $b$ ஐ வகுக்கிறது' என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதனை $a \mid b$ என்று குறிப்போம். $a$ என்பது $b$ ஐ வகுத்தால், $b$ என்பது $a$-ன் மடங்கு என்றும் (multiple of $a$), $a$ என்பது $b$-ன் காரணி என்றும் ($a$, factor of $b$) கூறப்படுகிறது.

குறிப்பு : $aRb = a/b$ என்னும் தொடர்பு (Relation) பிரதிபலிக்கும் தன்மை உடையது எனவும் (Reflexive), கடத்தும் தன்மை கொண்டது எனவும் (Transitive) நிரூபிக்கலாம். ஆனால், சமச்சீர்த் தன்மை வாய்ந்தது அல்ல. (Not symmetric)

**4·2.** வரையறை : அலகுக் காரணிகளும் சேர்ப்புகளும் (Units and Associates)

ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் பெருக்கல் அலகு $e$ ஆல் வகுபடும் பூச்சியமல்லாத D-ல் உள்ள உறுப்புகள் அலகுக் காரணிகள் (units) எனப்படும். (அ-து) $p$ என்பது D-ல் ஓர் அலகுக் காரணி என்றால் $p/e$ ஆகும். (அ-து) $e = pq$, $q \in D$. இந் நிலையில் $p$, பெருக்கல் எதிர்மறையைப் (Multiplicative inverse) பெற்றது என்று கூறலாம்.

குறிப்பு : III, 2·16-ல் அலகை உடைய வளையத்தில் கூறப்பட்டுள்ள அலகுக் காரணியின் வரையறையும் மேற்கூறிய வரையறையும் பொருளளவில் ஒன்றேயாகும்.

ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் $a$, $b$ என்பவை எவையேனும் இரு பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $a/b$, $b/a$ என்று இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, $a$, $b$ என்பவை ஒன்றுக்கு மற்றது சேர்ப்பு (Associate) எனப்படுகிறது.

எ. கா. 1 : எண் அரங்கம் Z-ல் $\pm 1$ மட்டுமே அலகுக் காரணிகள் ஆகும்.

நிரூபணம் : $a, b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $ab = 1$ என்றால், $|a| \ |b| = 1$ ஆகும். $\therefore |a| > 0$, $|b| > 0$

$$\therefore \ |a| \geq 1, \ |b| \geq 1 \qquad [\because \ |a|, |b| \in N]$$

ஆனால் $|a| > 1$ அல்லது $|b| > 1$ என்றால் $|a| \cdot |b| > 1$ ஆகும்.

$\therefore \quad |a| = 1, \quad |b| = 1 \quad \therefore \quad a = \pm 1$ அல்லது $b = \pm 1$

(அ-து) $\pm 1$ மட்டுமே Z-ல் அலகுகள் ஆகும்.

**எ. கா. 2 :** Z-ல் $a$, $b$ என்பவை ஒன்றுக்கு மற்றது சேர்ப்பு என்றால், $a = \pm b$ ஆகும்.

**நிருபணம் :** $a$, $b$ என்பவை ஒன்றுக்கு மற்றது சேர்ப்பு எனின்

$a/b$, $b/a$ ஆகும். $\therefore b = aq \quad a = br, \quad q, r \in Z$

$\therefore \quad a = aqr \quad a \neq 0$ ஆதலால் $qr = 1$.

$\therefore \quad q = \pm 1, r = \pm 1 \quad$ [எ. கா. 1]

$\therefore \quad a = \pm b$.

**எ. கா. 3 :** ஒரு களத்தில் எல்லாப் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளும் அலகுக் காரணிகள் ஆகும். மேலும் எல்லாப் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளும் மற்ற எல்லாப் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளுக்கும் சேர்ப்பு ஆகும்.

குறிப்பு : ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் $a$ என்பது பூச்சியமல்லாத உறுப்பு எனின், $a \mid a$, $-a \mid a$, $e \mid a$, $-e \mid a$ ஆகும்.

**4·3. வரையறை : பகா எண் (Prime number)**

ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் பூச்சியமல்லாத உறுப்பு $p$, பின் வரும் விதிகளை நிறைவு செய்தால், நிறைவு செய்தால் மட்டுமே, $p$ ஒரு பகா எண் (Prime element) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) $p$ என்பது D-ல் அலகுக் காரணி அல்ல.

(ii) $p$-க்கு, அதன் சேர்ப்புகளும், அலகுக் காரணிகளும் தவிர, மற்றக் காரணிகள் கிடையாது.

D-ல் ஒரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பு பகா எண்ணாக இல்லாவிடில் அது கலவை எண் [Composite element] எனப்படும்.

**குறிப்பு 1.** எண் அரங்கம் Z-ல் மேற்கூறிய வரையறையைப் பின் வருமாறு கூறலாம். Z-ல் பூச்சியமல்லாத எண் $p$ அலகுக் காரணியாக இல்லாமலும், $(p \neq \pm 1)$ $p$-க்கு அதன் சேர்ப்புகளும் அலகுக் காரணிகளும் தவிர மற்றக் காரணிகள் கிடையாது என்றும்,

[ (அ-து) $p$ என்பது $\pm 1, \pm p$ ஆல் மட்டுமே வகுபடும்] இருந்தால், இருந்தால் மட்டுமே, $p$ ஒரு பகா எண் எனப்படுகிறது.

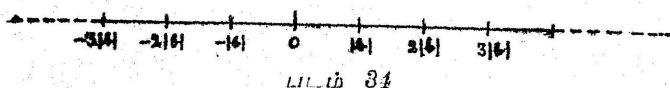
குறிப்பு 2. $p$ என்பது D-ல் பகா எண் எனின் $p$-ன் சேர்ப்புகளும் D-ல் பகா எண்கள் ஆகும். 2,3,5,7,11,13,17,19...... என்பவை Z-ல் பகா எண்கள் ஆகும். Z-ன் ஒரு கலவை எண்ணை எடுத்துக் கொண்டால் அதனைப் பல பகா எண்களின் பெருக்கலாகக் கூறமுடியும். இதுவே எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றமாகும் [Fundamental theorem of Arithmetic]. இதனை நிரூபிப்பதற்கு முன் பின்வரும் முன்னேற்பாடுகளைச் செய்து கொள்வோம்.

## 4·4. வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கு [Division Algorithm]

முழு எண்களில், ஓர் எண் $a$ ஐ மற்றொரு பூச்சியமல்லாத எண் $b$ ஆல் வகுக்கும்பொழுது வகுத்தல் முறை மூலம் (Process of Division) ஓர் ஈவும், மீதியும் கிடைக்கும் என முன்னரே அறிந்திருக்கிறோம். இதனை Z-ன் அடிப்படைக் கொள்கைகளிலிருந்து இங்கு நிரூபிக்கலாம்.

**தேற்றம் :** $a,b$ என்பவை Z-ல் எவையேனும் இரு முழு எண்களாக இருக்கட்டும். $b \neq 0$ எனின் $\exists\, q,\ r \in Z, |\ a=bq+r,\ 0 \leq r < |b|$ ஆகும். மேலும் $q,r$ என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்த முழு எண்கள் ஆகும்.

**நிரூபணம் :** தேற்றம் உண்மையா என்பதை வரைமுறை கணிதத்தின் மூலம் பார்ப்போம். முழு எண்களை ஒரே நேர்க் கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகளால் குறியீடு செய்வதாகக் கொள்வோம். அப்பொழுது $|b|$-ன் மடங்குகளைக் குறியீடு செய்யும் புள்ளிகள் அந் நேர்க்கோட்டில் சமநீளம் கொண்ட இடை வெளிகளை (interval) அமைக்கும்.




படம் 34

$a$ ஐக் குறிக்கும் புள்ளி இந்நேர்க்கோட்டில் ஏதாவது ஓர் இடை வெளியில் இருக்க வேண்டும்.

$|b|$-ன் மடங்கைக் குறியீடு செய்யும் ஒரு புள்ளி $a$ ஐயும் குறியீடு செய்தால் $a = q|b|$ $[q \in Z]$ என எழுதலாம் $\therefore a = \pm qb$ $[\because |b| = \pm b]$ $\therefore a = \pm qb + 0$.

$|b|$-ன் இரு மடங்குகளுக்கிடையே உள்ள இடைவெளியில் $a$ ஐக் குறியீடு செய்யும் புள்ளி இருந்தால், $q|b| < a < (q+1)|b|$ என எழுதலாம். $[q \in Z]$

$\therefore \; a - q \mid b \mid > 0$

$a - q \mid b \mid = r$ எனக் கொள்வோம்.

$r \in z$, மேலும் $r > 0$ ஆகும்.

$a < (q+1) \mid b \mid$ ஆதலால் $a - qb < \mid b \mid$

(அ-து) $r < \mid b \mid$

$\therefore \; a = q \mid b \mid + r, \quad 0 < r < \mid b \mid$

(அ-து) $a = \pm qb + r, \; 0 < r < \mid b \mid \quad [q, r \in z]$

இயற் கணிதத்தின் மூலம் இதற்கு ஒரு நிருபணம் காண்போம்.

வகை 1 $b > 0$ என்க.

$\therefore \; b > 1$ ஆகும்.

$S = \{ a - bx \mid x \in z, \; a - bx > 0 \}$ என்றவாறு கணம் S அமைக்கப்படுகிறது.

$b > 1$ ஆதலால், $b \mid a \mid > \mid a \mid$. ஆனல் $\mid a \mid > -a$

$\therefore \; b \mid a \mid > -a$

$\therefore \; b \mid a \mid + a > 0$ (அ-து) $a - b [- \mid a \mid ] > 0$

$- \mid a \mid \in Z$ ஆதலால் $a - b \; [- \mid a \mid ] \in S$. ஆகையால் S வெறுமைக் கணமல்ல. $0 \in S$ எனின் [S எதிர் எண்களைக் கொண்டிராத கணமாதலால்) S-ன் மிகக் குறைந்த எண் ஆகும். $0 \notin S$ எனின், S என்பது நேர் எண்களை மட்டும் கொண்ட கணமாதலால் இயற்கை எண்களால் ஆன கணம் N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மைப்படி, S-ல் மிகக் குறைந்த எண் உண்டு.

ஆகையால் S-ல் 0 இருந்தாலும், இல்லாவிட்டாலும், S-ல் மிகக்குறைந்த எண் ஒன்று உண்டு. அதனை $r$ என்று குறிப்போம்.

$\therefore \; r \in S, \quad \therefore \; \exists q \in Z \mid r = a - bq$ ஆகும்.............. (1)

மேலும், $r > 0$ ஆகும். ... ... ... (2)

$r < b$ என்கிறோம். இல்லாவிடில் $r > b$ என்றால்,

$r - b > 0, \quad \therefore \; a - bq - b > 0$

(அ-து) $a - b(q + 1) > 0$

$\therefore\ a - b(q+1) \in s$. மேலும் $a - b(q+1) < a - bq$
(அ-து) $a - b(q+1) < r$

இது ஒரு முரண்பாடாகும். [ ஏனெனில் S-ன் மிகக் குறைந்த எண் $r$ ஆகும்.]

$\therefore\ r \geq b$ எனக் கொண்டது தவறு.

$\therefore\ r < b$ ... ... ... (3)

(2), (3) என்பதிலிருந்து, $0 \leq r < b$ எனக் கிடைக்கிறது.

(1)-ல் இருந்து $r = a - bq \quad \therefore\ a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$
$[q, r \in z]$

(அ-து) $\exists\, q, r \in z \,/\, a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$
$[\because\ b > 0$ எனின் $b = |b|\ ]$

வகை 2 : $b < 0$ என்க. $\quad \therefore\ -b > 0$

$a, -b$ என்ற இரு எண்களை எடுத்துக்கொள்வோம்.

வகை 1-ன் படி, $\exists\, q, r \in z \,/\, a = (-b)q + r, \ 0 \leq r < |-b|$

(அ-து) $a = b(-q) + r, \quad 0 \leq r < |b|$
$= bq' + r, \quad q' = -q \in z$

$\therefore\ \exists\ q', r \in z \,/\, a = bq' + r, \quad 0 \leq r < |b|$

**(ii)** $a = bq + r, \ 0 \leq r < b$ என்பதில் $q, r$ என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்த முழு எண்கள் என நிரூபிக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லாவிடில், $q_1, r_1 \in z, \ a = bq_1 + r_1, \ 0 \leq r_1 < |b|$ என்று இருக்கட்டும்.

$\therefore\ bq + r = bq_1 + r_1$

$\therefore\ b(q - q_1) = r_1 - r$

$\therefore\ |b(q - q_1)| = |r_1 - r|$

$\therefore\ |b|\ |q - q_1| = |r_1 - r|$

ஆனல், $0 \leq r, r_1 < |b|$ ஆதலால் $|r_1 - r| < |b|$

$\therefore\ |b|\ |q - q_1| = |r_1 - r| < |b|$

$\therefore \quad |b| \quad |q-q_1| < |b| \Longrightarrow | \ |q-q_1| = 0$

[ $\because$ $|q-q_1| > 0$ ] $|q-q_1| > 0$ ஆக இருக்க முடியாது.

$\therefore \quad q = q_1$

$bq + r = bq_1 + r_1$ என்ற சமன்பாட்டில் $q = q_1$ என்று பிரதியிட $r = r_1$ எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore \quad a = bq + r, \quad 0 \leq r < |b|$ என்பதில், $q$, $r$ என்பவை தனித் தன்மை வாய்ந்த எண்ணிகளாகும் [Unique]

குறிப்பு : $a$ ஐ $b$ ஆல் வகுக்கும்பொழுது கிடைக்கும் $q$, ஈவு என்றும் (quotient), $r$ என்பது மீதி (Remainder) என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

## 4·5. உத்தமப் பொதுக் காரணி (Greatest Common Divisor)

வரையறை: ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் $a, b$ என்பவை எவையேனும் இரு பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $d$ என்ற D-ல் உள்ள உறுப்பு பின்வரும் விதிகளை நிறைவு செய்தால், செய்தால் மட்டுமே, அது $a$, $b$ என்ற உறுப்புகளின் உத்தமப் பொதுக் காரணி (Greatest common divisor) என அழைக்கப்படுகிறது.

(i) $d$ என்பது $a$, $b$-க்கு ஒரு பொதுக் காரணியாக இருக்க வேண்டும்.

(ii) $a$, $b$-க்கு வேறு எந்தப் பொதுக் காரணி இருந்தாலும் அது $d$-ன் காரணியாகும். (அ—து) $g \mid a$, $g \mid b \Longrightarrow g \mid d$.

குறிப்பு 1 : உத்தமப் பொதுக் காரணியை உ.பொ.கா. என்று குறிப்போம். $d$ என்பது $a$, $b$-ன் உ. பொ. கா. ஆனால் $-d$-ம் $a$, $b$-க்கு உ.பொ.கா. ஆகும். பொதுவாக $d$, $-d$ ஆகியவற்றுள் மிகை முழு எண்ணையே உ.பொ.கா. ஆக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம். மேலும் $a$, $b$-ன் உ.பொ.கா. ஐ $(a, b)$ என்று குறிப்போம்.

குறிப்பு 2 : $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$ என நிரூபிக்கலாம்.

எந்த இரு பூச்சியமல்லாத முழு எண்களுக்கும் உ.பொ.கா. உண்டு என்று நிரூபிப்பதற்கு முன்னேற்பாடாகப் பின்வரும் தேற்றத்தை நிரூபிப்போம்.

4·6. தேற்றம் : முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z-ல் S என்பது வெறுமையற்ற உள் அடங்கு கணமாகும். மேலும் கணம் S, கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் அடைப்புள்ளது என்றால், $S = \{0\}$ அல்லது S-ல் ஒரு மிகக்குறைந்த நேர்முழு எண் ஒன்று உண்டு; S-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் அந்த எண்ணின் மடங்காகும்.

நிரூபணம் : S-ல் $0$ மட்டும் இருந்தால் $S = \{0\}$.

S-ல் $a \neq 0$ என்ற எண் இருந்தால் [∵ S வெறுமையற்ற கணமாகும்]

$a - a \in S$ [∵ S என்பது கழித்தலுக்கு அடைப்புள்ளது]

∴ $0 \in S$.

∴ $0 - a = -a \in S$.

$a$, $-a$ ஆகியவற்றுள் ஏதாவது ஒன்று மிகை முழு எண் ஆக இருக்கவேண்டும் [3·6, 2 (6)]

∴ S, மிகை முழு எண்களைக் கொண்டுள்ளது.

ஆகையால் N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மைப்படி, S-ல் உள்ள நேர் முழு எண்களைக் கொண்ட கணத்திற்கு ஒரு மிகக் குறைந்த எண் உண்டு. அதனை $m$ எனக் கொள்வோம்.

$m$-ன் எல்லா மிகை முழு எண் மடங்குகளும் (positive integral multiples) S-ல் இருக்கும் என்று நிரூபிக்க முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$T(n) = \{ n.m \in S \}$ $[n \in N]$ என்க.

$T(1)$ உண்மை [∵ $1.m \in S$]

எந்த ஓர் இயற்கை எண் $k$-க்கும் $T(k)$ உண்மை என்றால்

$k.m \in S$. ∴ $k.m + m \in S$ ∴ $\overline{k+1}\, m \in S$
[∵ S என்பது கூட்டலுக்கு அடைப்புள்ளது என்பது தரவு]

∴ $T(k+1)$ உண்மையாகும்.

∴ முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையின்படி, $T(n)$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மையாகும்.

(அ-து) $n.m \in S \quad \forall n \in N$.

$0 . m = 0 \in S, \quad \forall n \in N, (-n) . (m) = (\quad nm)$
$= 0-(nm) \in S$
$[\because nm \in S]$.

$\therefore$ $m$-ன் எல்லா முழு எண் மடங்குகளும் [integral multiples of m] S-ல் இருக்கும். ......................... (1)

S-ல் யாதேனும் ஓர் எண் $a$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a, m$ ஆகிய எண்களுக்கு வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்த $a = qm+r) \; 0 \leq r < m \quad q, r \in z$ என்று கிடைக்கும்.

$r=0$ எனின் $a$ என்பது $m$-ன் மடங்காகும்.

$r \neq 0$ எனின் $a-qm = r$

$\because \; a \in s, \quad qm \in S \quad [(1)$ இலிருந்து$]$

$a - qm \in S$ [ $\because$ S , கழித்தலுக்கு அடைப்புள்ளது]

$\therefore \; r \in S$.

$r > 0, r < m$ ஆதலால் $r$ என்பது S-ல் உள்ள நேர் முழு எண்களைக் கொண்ட கணத்தில் உள்ள மிகக் குறைந்த எண் $m$ ஐ விடக் குறைவாக உள்ளது. இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

$\therefore r = 0. \qquad \therefore a = qm$

$\therefore$ S-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் $m$-ன் மடங்காகும். ... (2)

(1), (2)-லிருந்து தேற்றத்தின் முடிவு கிடைக்கிறது.

குறிப்பு : தேற்றத்தில் கணம் S கூட்டலுக்கு அடைப்புள்ளது என்புதை நீக்கிவிட்டாலும் முடிவு கிடைக்குமா ? இது பயிற்சியாக விடப்படுகின்றது.

**4·7. தேற்றம் :** இரு பூச்சியமல்லாத முழு எண்களுக்கு உ. பொ. கா. இருக்கும். (Existence theorem for G. C.D. of two non-zero integers)

$a, b$ என்பவை எவையேனும் இரு பூச்சியமல்லாத எண்களாக இருக்கட்டும். அவற்றிற்கு ஓர் உ. பொ. கா. உண்டு. மேலும் அந்த உ. பொ. கா. $a$, $b$-ன் ஒருபடிச் சேர்வாக (Linear combination) இருக்கும்.

நிரூபணம் : $sa + tb,\ s, t \in z$ என்பது $a, b$-ன் ஒருபடிச் சேர்வு எனப்படுகிறது.

$S = \left\{ sa + tb \Big/ s, t \in z \right\}$ என்ற கணத்தைை எடுத்துக் கொள்வோம். இக்கணம் கூட்டலுக்கும், கழித்தலுக்கும் அடைப்புள்ளது என எளிதாக நிறுவலாம். $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a, b \in s$. ஆதலால் கணம் S-ல் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளும் உண்டு. [ எடுத்துக் காட்டாக, $a, b \in s$ ] ஆகையால் தேற்றம் 4 6-ன் படி S-ல் ஒரு மிகக் குறைந்த இயற்கை எண் $d$ உண்டு. மேலும் S-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் $d$-ன் மடங்காகும்.

$a = 1 \cdot a + 0 \cdot b \in s,\ b = 0 \cdot a + 1 \cdot b \in s$ ஆதலால், $d \mid a,\ d \mid b$. $d \in s$ ஆதலால், $d = s_1 a + t_1 b,\ s_1, t_1 \in z$ என எழுதலாம்.

$h \in z,\ h \mid a,\ h \mid b$ எனின், $h \mid s_1 a + t_1 b$

$\therefore\ h \mid d$

$\therefore$ $d$ என்பது $a, b$-ன் உ.பொ.கா. ஆகும்.

மேலும், $d = s_1 a + t_1 b$ ஆதலால், $a, b$-ன் உ. பொ. கா. $a, b$-ன் ஒருபடிச் சேர்வு ஆகும்.

குறிப்பு 1 : $a, b$-ல் யாதேனும் ஒன்று பூச்சியமாக இருந்தால், அவற்றின் உ.பொ.கா. மற்ற (பூச்சியமல்லாத) எண்ணாகும். (அ-து) $(0, a) = a\ [a \neq 0]$.

குறிப்பு 2 : மேற்கூறிய தேற்றங்களை நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கங்களிலும் (Well ordered domain) நிரூபிக்கலாம்.

### 4 8. யூக்ளிட் இலக்கணக் கணக்கு [Euclidean Algorithm] இரு நேர் முழு எண்களின் உ.பொ.கா. காண வழி

$a, b$ என்பவை இரு வெவ்வேறு நேர் முழு எண்களாக இருக்கட்டும். $(a \neq b)$

$a > b$ எனக் கொள்வோம் ($b > a$ என்றாலும் இதேபோன்று நிரூபிக்கலாம்). வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்த,

$\exists\ q_1, r_1 \in Z, \Big/ a = bq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b$ என்று எழுதலாம்.

∴ $r_1 = a - bq$ ∴ $a, b$ ஆகியவற்றின் பொதுக் காரணி $r_1$ ஐ வகுக்கும். ஆகையால் அக்காரணி $b, r_1$-ன் பொதுக் காரணி (Common divisor) ஆகும்.

இதேபோன்று $a = bq_1 + r_1$ ஆதலால் $b, r_1$-ன் பொதுக் காரணி $a$ ஐ வகுக்கும். ஆகையால், அக்காரணி $a, b$-ன் பொதுக் காரணியாகும். ஆகையால் $a, b$-ன் பொதுக் காரணிகளும் $b, r_1$-ன் பொதுக் காரணிகளும் ஒன்றாக இருக்கும். [$a, b$ and $b, r_1$ have the same set of common divisors] ... (1)

$$r_1 = 0 \text{ எனின், } (b, r_1) = b \quad \therefore \quad (a, b) = b.$$

அதாவது $a, b$-ன் உ. பொ. கா. $b$ ஆகும்.

$r_1 \neq 0$ எனின் வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்தி,

$b = q_2 r_1 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$ $[q_2, r_2 \in Z]$ என எழுதலாம்.

(1)-ல் கூறியது போல், இங்கும்,

$(b, r_1) = (r_1, r_2)$ என நிரூபிக்கலாம்.

$r_2 = 0$ எனின், $(r_1, r_2) = r_1$ ∴ $(b, r_1) = (a, b) = r_1$

$r_2 \neq 0$ எனின் மீண்டும் வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கை $r_1$, $r_2$ என்ற எண்களுக்குப் பயன்படுத்துவோம்.

$$r_1 = r_2 q_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < r_2 \quad [q_3, r_3 \in z]$$

..................

..................

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n \quad 0 \leq r_n < r_{n-1} \quad [q_n, r_n \in z]$$

$r_1, r_2, \ldots\ldots r_n$ என்பவை இறங்கு வரிசையில் உள்ளதாலும், $r_1$ முடிவுள்ள இயற்கை எண் ஆதலாலும், இவ்வாறு திரும்பத் திரும்ப வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்துவது ஒரு நிலையில் முடிய வேண்டும். அந்நிலையில் மீதி 0 என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$r_1, r_2, \ldots\ldots r_n \ldots\ldots$ என்ற இறங்கு வரிசையில் உள்ள குறையல்லாத முழு எண்களைக் கொண்ட கணத்தை S என்று

குறிப்போம் இதில் 0 உள்ளது என்கிறோம். 0 இல்லாவிடில் S-ல் உள்ள எல்லா எண்களும் இயற்கை எண்கள் ஆகிவிடுவதால், N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மைப்படி, இக் கணத்தில் மிகக் குறைந்த இயற்கை எண் ஒன்று இருக்கவேண்டும். அதனை $r_m$ எனக் குறிப்போம். $\therefore\ r_m > 0$.

$\therefore\ r_{m-1} > r_m > 0$. வகுத்தல் இலக்கணக்கணக்கைப் பயன்படுத்தி, $r_{m-1} = q_{m+1}\, r_m + r_{m+1},\ 0 \leq r_{m+1} < r_m$ எனஎழுதலாம்.

$\therefore\ r_{m+1} \in S,\ r_{m+1} < r_m$ — இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

ஆகையால் $0 \in S$. $r_{n+1} = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\begin{aligned} \therefore\ r_{n-1} &= r_n\, q_{n+1} + r_{n+1} \quad [q_{n+1}, r_{n+1} \in Z] \\ &= r_n\, q_{n+1} \quad\quad\quad\quad [\because\ r_{n+1} = 0\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ r_n = (r_n, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_{n-2}) &= \ldots\ldots = (r_2, r_1) \\ &= (r_1, b) = (b, a) \end{aligned}$$

$\therefore\ (a, b) = r_n$.

$a$, $b$-ன் உ.பொ.கா. தொடர்ந்து செய்யப்படும் வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கில் இறுதியாகக் கிடைக்கும் பூச்சியமல்லாத மீதியாகும்.

குறிப்பு 1 : $a$, $b$ ஆகியவற்றுள் எந்த ஒன்று எதிர் முழு எண்ணாக இருந்தாலும், $-a$, $b$ அல்லது $a$, $-b$-ன் உ. பொ. கா. ஐக் கண்டுபிடிக்கலாம். மேலும் 4·5 குறிப்பு 2-ன் படி,

$(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$ ஆகும். $a = 0$ அல்லது $b = 0$ எனின், முறையே $(a, b) = b$ அல்லது $(a, b) = a$ ஆகும்.

குறிப்பு 2 : தேற்றத்தில் $r_1 = a - bq_1 = a + (-q_1)\, b$

$$\begin{aligned} r_2 = b - r_1\, q_2 &= b - \{\, a + (-q_1)\, b\}\, q_2 \\ &= (-q_2)\, a + \{1 + q_1\, q_2\,\}\, b \end{aligned}$$

............என்று எழுதலாம்.

ஆகையால், ஒவ்வொரு நிலையிலும் கிடைக்கும் மீதியும் $a$, $b$-ன் ஒரு படிச் சேர்வு ஆகும்.

ஆகையால் $a$, $b$-ன் உ. பொ. கா. $a$, $b$-ன் ஒரு படிச் சேர்வு ஆகும். $\therefore$ $(a, b) = sa + tb$, $s, t = z$ என எழுதலாம்.

## 4·9. அதமப் பொது மடங்கு (Least Common Multiple)

வரையறை : ஓர் எண் அரங்கம் D-ல், பூச்சியமல்லாத $a$, $b$ எனும் இரு உறுப்புகளின் அதமப் பொது மடங்கு $l$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

(i) $l$ என்பது $a$, $b$-ன் பொது மடங்காகும். [Common multiple of $a$ and $b$ ] (அ-து) $a \mid l$, $b \mid l$

(ii) $a$, $b$-க்கு வேறு எந்தப் பொது மடங்கு இருந்தாலும் அது $l$-ன் மடங்காக இருக்கும். (அ-து) $a \mid m$, $b \mid m$, எனின், $l \mid m$.

குறிப்பு : அதமப் பொது மடங்கை அ. பொ. ம. என்று குறிப்போம். $l$ என்ற எண் $a$, $b$-ன் அ. பொ. ம. ஆனால், $-l$ என்ற எண்ணும் $a$, $b$-ன் அ. பொ. ம. ஆகும். பொதுவாக, $l$, $-l$ ஆகியவற்றுள் நேர் முழு எண்ணையே அ. பொ. ம. ஆக எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

4·10. தேற்றம் : Z-ல் எந்த இரு பூச்சியமல்லாத முழு எண்களுக்கும் ஓர் அ. பொ. ம. உண்டு.

நிரூபணம் : $S = \left\{ m \,/\, m \in z, a \mid m, b \mid m \right\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். S-ல் $a \cdot b$ உள்ளதால், S வெறுமைக் கணமல்ல. மேலும் S-ல் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளும் உண்டு. [$\because$ $ab \neq 0$]

மேலும் $\forall\, m_1, m_2 \in s$, $m_1 \pm m_2$ என்பவை $a$, $b$-ன் பொது மடங்குகள் என நிரூபிக்கலாம். $\therefore m_1 \pm m_2 \in s$. ஆகையால் கணம் S, கூட்டலுக்கும் கழித்தலுக்கும் அடைப்பு உள்ளது

$\therefore$ தேற்றம் 4·6-ன் படி S-ல் ஒரு மிகக் குறைந்த இயற்கை எண் ஒன்று உண்டு. அதனை $l$ என்று குறிப்போம். அதே தேற்றத்தின் படி, S-ல் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் $l$-ன் மடங்காகும்... ...(1)

$l \in s$ ஆதலால் $a \mid l$, $b \mid l$

மேலும், $a \mid K$, $b \mid K$ எனின் $K \in s$, $\therefore l \mid K$ [ (1)-லிருந்து ]

∴ $l$ என்பது $a, b$-ன் அதமப் பொது மடங்கு ஆகும்.

குறிப்பு : மேற்கூறிய தேற்றத்தை நன்கு வரிசைப்பட்ட அரங்கத்திலும் (Well ordered domain) நிரூபிக்கலாம்.

4·11. வரையறை : எண் அரங்கம் D-ல் $a, b$ என்பவை பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $a, b$-ன் உ. பொ. கா. D-ன் பெருக்கல் அலகு $e$ எனின், $a, b$ என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் (Relatively prime numbers) என வரையறுக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு : எண் அரங்கம் Z-ல் பூச்சியமல்லாத இரு உறுப்புகளின் உ. பொ. கா. 1 எனின், $a, b$ என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் ஆகும்.

மேலும் தேற்றம் 4·7-ன்படி $(a, b) = sa + tb, \quad s, t \in z$ ஆதலால் இங்கு $sa + tb = 1$ எனக் கிடைக்கும்.

∴ $a, b$ என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் எனின் $\exists\, s, t \in z, \mid sa + tb = 1$ ஆகும்.

4·12. தேற்றம்: முழு எண்களைக் கொண்ட எண் அரங்கம் Z-ல் $p$ ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கட்டும். $a, b \in z, p \mid ab \Longrightarrow p \mid a$ அல்லது $p \mid b$ ஆகும்.

நிரூபணம் : $p \mid a$ எனின் தேவையான முடிவு கிடைத்துவிடும். $p$ என்பது $a$ ஐ வகுக்கவில்லை எனின், $p$-ன் காரணிகள் $\pm 1$, $\pm p$ மட்டும் ஆதலால், $a, p$-ன் உ. பொ. கா. 1 ஆகும்.

∴ 4·11 குறிப்பின்படி, $\exists\, s, t \in z \mid sa + tp = 1$

இரு பக்கமும் $b$ ஆல் பெருக்க,

$$bsa + btp = b$$

(அ-து.) $abs + p(tb) = b$

$p \mid ab$ என்பது தரவு ஆதலால் $p \mid abs + p(tb)$

∴ $p \mid b$ ஆகும்.

ஆகையால் $p \mid a$ அல்லது $p \mid b$ ஆகியவற்றுள் ஒன்றாவது உண்மையாகும்.

குறிப்பு : இதனை விரிவுபடுத்தி $p \mid a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$ எனின், $p \mid a_1$ அல்லது $p \mid a_2 \ldots\ldots$ அல்லது $p \mid a_n$ என நிரூபிக்கலாம்.

கிளைத் தேற்றம் 1. $(a, c) = 1$ எனின் $c \mid ab \Longrightarrow c \mid b$ $[a, b, c \in z, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0]$

$(a, c) = 1$ ஆதலால் $\exists\, s, t \in z \mid s a + t c = 1$,

$\therefore\; s a b + t c b = b$

$c \mid ab$ என்பது தரவு ஆதலால் $c \mid a b s + c (t b)$

(அ - து) $c \mid b$

கிளைத் தேற்றம் 2. $(a, c) = 1$, $a \mid h$, $c \mid h$ என்றால் $ac \mid h$ ஆகும்.

$[a, c, h \in z$, மேலும் $a \neq 0, c \neq 0, h \neq 0$,

$a \mid h$ ஆதலால் $h = a k$, $k \in z$

$(a, c) = 1, c \mid a k$ ஆதலால், $[c \mid h, h = a k \Longrightarrow c \mid a k]$

$c \mid k$ [கி. தே. 1]

$\therefore\; k = c l, l \in z.$ $\qquad \therefore\; h = a c l$

$\therefore\; a c \mid h.$

## 4·13. எண் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றம் (Fundamental theorem of Arithmetic)

தேற்றம் : பூச்சியமல்லாத எந்த ஒரு முழு எண்ணையும், $\pm 1$) நேர்ப் பகா எண்கள் ஆகியவற்றின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு வழியில் தான் கூற முடியும். [காரணிகள் எந்த வரிசையிலும் இருக்கலாம்.]

வகை 1 : $a$ என்பது பூச்சியமல்லாத நேர் முழு எண்ணாக இருக்கட்டும்.

$\therefore\; a > 1$ ; $a$ பகா எண்ணாகவும் இருந்தால், $a = +1 \cdot a$. ஆகையால் எந்த ஒரு நேர்ப் பகா எண்ணையும், '$+1$, நேர்ப்பகா எண்' ஆகியவற்றின் பெருக்கலாகக் கூற முடியும். ... ... (1)

N-ல் நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாகக் கூற முடியாத இயற்கை எண்களைக் கொண்ட கணத்தை K என்று குறிப்போம்.

K வெறுமையற்ற கணமாயின், N-ன் நன்கு வரிசைப்பட்ட தன்மைப்படி K-ல் மிகக் குறைந்த நேர் முழு எண் உண்டு. அதனை $d$ என்று குறிப்போம். $d$ என்பது நேர்ப் பகா எண்ணாக இருக்க முடியாது. [ ∵ $d \in k$, (1)-லிருந்து ]

∴ $d = d_1 d_2$, $1 < d_1 < d$, $1 < d_2 < d$ என எழுதலாம். $d$ என்பது $k$-ல் மிகக் குறைந்த எண் ஆதலால் $d_1$, $d_2 \notin$ K.

∴ $d_1$, $d_2$ ஆகியவற்றை நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாகக் கூற முடியும்.

$d = d_1 d_2$ ஆதலால் $d$-ம் நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கல் ஆகும். இது ஒரு முரண்பாடாகும். [∵ $d \in k$ ]

ஆகையால் K வெறுமையற்ற கணம் எனக் கொண்டது தவறு.

∴ K ஒரு வெறுமைக் கணமாகும்.

K-ன் அமைப்பிலிருந்து எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணையும், நேர்ப் பகா எண்களின் (Positive primes) பெருக்கலாகக் கூற முடியும் என்பது தெளிவு.

ஒவ்வோர் இயற்கை எண்ணையும், நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு வழியில் தான் கூற முடியும் என நிரூபிக்க வேண்டும். இதற்குத் தொகுப்பு ஆய்வு முறையைப் பயன்படுத்துவோம். [Induction process]

S $(n)$ = { எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணையும் $n$ நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாகக் கூற முடிந்தால், அவ்வாறு பெருக்கலாகக் கூறுவது (காரணிகளின் வரிசைக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்காமல்) ஒரே ஒரு வழியில்தான் முடியும், $n \in$ N } என்று எடுத்துக் கொள்வோம்.

S (1) என்பது உண்மை என்பது வெளிப்படை. ... ... (2)

எந்த ஓர் இயற்கை எண் K-க்கும், S (K) உண்மை எனக் கொள்வோம். ... ... ... ... (3)

S (K + 1) உண்மை என நிறுவ வேண்டும்.

$b$ என்ற இயற்கை எண் (K + 1) நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்குத் தொகையாக இருக்கட்டும்.

$$b = p_1 p_2 \cdots\cdots p_{k+1} \quad [0 < p_i < b, \; p_i \in N]$$

முடிந்தால், $b = q_1 q_2 \cdots\cdots q_m$ என்று இருக்கட்டும். $[0 < q_j < b$ $q_j \in N]$ $[q_j$ என்பவை பகா எண்கள் $]$

$k > 1$ ஆதலால் $b$-க்கு இரு பகா எண்களாவது இருக்கும். $\therefore m > 1$.

மேலும் $p_1 p_2 \cdots\cdots p_{k+1} = q_1 q_2 \cdots\cdots q_m$ ... ... (4)

$\therefore p_1 \mid q_1 q_2 \cdots\cdots q_m$ $\therefore p_1$ என்பது $q_1, q_2 \cdots\cdots q_m$ ஆகியவற்றுள் யாதேனும் ஒன்றையாவது வகுக்க வேண்டும். பொதுத் தன்மைக்குப் பங்கம் ஏற்படாதவாறு (Without loss of generality) அதனை $q_1$ எனக் கொள்வோம்.

$p_1$, $q_1$ என்பவை நேர்ப் பகா எண்கள் ஆதலால், $p_1 = q_1$ ஆகும். ... ... ... ... (5)

(4)-ன் இரு பக்கமும் இக்காரணியை நீக்க, $p_2 \ldots p_{k+1} = q_2 \ldots q_m$ எனக் கிடைக்கும்.

இடப் பக்கம் K நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கல் ஆதலால், (3)-லிருந்து $m - 1 = K$ எனவும், $p_2 \cdots\cdots p_{k+1}$ என்பவை $q_2, \cdots q_m$ என்ற பகா எண்களோடு இதே வரிசையில் அல்லது வேறு வரிசையில் சமமாய் இருக்க வேண்டும். ... ... (6)

(5), (6)-லிருந்து S (K + 1) என்பது உண்மை எனத் தெரிகிறது. ... ... ... ... ... (7)

(1), (3), (7) ஆகியவற்றிலிருந்தும், முதல் தொகுப்பு ஆய்வுக் கொள்கையிலிருந்தும், S $(n)$ என்பது எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் உண்மை எனத் தெரிகிறது.

ஆகையால், எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணையும் நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாக (காரணிகளின் வரிசைக்கு முக்கியத்துவம் அளிக்காமல்) ஒரே ஒரு வழியில்தான் கூறமுடியும்.

மேலும், $a = p_1 p_2 \ldots\ldots p_n$ எனின், $a = (+1) \cdot p_1 p_2 \cdots\cdots p_n$ என எழுதலாம். $[\because a \in N]$

$[p_1, p_2 \cdots p_n$ என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்த நேர்ப் பகா எண்கள்.$]$

வகை 2 : $a$ என்பது எதிர் முழு எண் எனின், $-a$ ஒரு நேர் முழு எண் ஆகும்.

∴ வகை 1-ன் படி, $-a = (+1) \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots p_n$

$\{p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்த நேர்ப் பகா எண்கள் $\}$

∴ $a = (-1) \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots p_n$

வகை 1 ஐயும், வகை 2 ஐயும் இணைத்து, $a$ என்பது எந்தப் பூச்சியமல்லாத முழு எண்ணாக இருந்தாலும், $a = (\pm 1) p_1 \cdot p_2 \ldots\ldots p_n$ [ $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ என்பவை தனித்தன்மை வாய்ந்த நேர்ப் பகா எண்கள் ] என எழுதலாம். [காரணிகளின் வரிசை எவ்வாறும் இருக்கலாம். ]

குறிப்பு : ஒரு முழு எண்ணை, நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாகக் கூறும் பொழுது, சில பகா எண்கள் திரும்பத் திரும்பப் பல தடவை வரலாம். அவ்வாறு பல தடவை வரும் ஒரு பகா எண்ணைச் சுருக்கி $p^i$ என்ற மாதிரி எழுதலாம். ஆகையால் எந்த ஒரு முழு எண் $a$ ஐயும்,

$a = (\pm 1) p_1^{n_1} \cdot p^{n_2} \ldots\ldots p_k^{n_k}$, $1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_k$ என்பவை இயற்கை எண்கள் என்று எழுதலாம்.

இது எண் $a$-ன் நியம ரூபம் (Standard form) எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, $-90 = (-1) \odot {}^{?} \odot 3 \odot 5$
$390 = (+1) \odot {:} \odot \odot 5 \odot 13$

எ. கா. 1 : $(180, 252)$ ஐக் காண்க. $(180, 252) = 180\,m + 252\,n$ எனின் $m, n$ எவ்வளவு ?

யூக்ளிட் இலக்கணக் கணக்கை 180, 252 ஆகிய எண்களுக்குப் பயன்படுத்த,

$$252 = 1 \times 180 + 72$$
$$180 = 2 \times 72 + 36$$
$$72 = 2 \times 36 + 0 \qquad \therefore \; 36 = (180, 252)$$
$$36 = 180 - 2 \times 72 = 180 - 2\{252 - 1 \times 180\}$$
$$= 3 \times 180 + (-2) \times 252$$

∴ $m = 3, n = -2.$

எ. கா. 2 : 243, 256 என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் என நிறுவுக.

$s \times 243 + t \times 256 = 1$ $(s, t \in z)$ எனின் $s$, $t$ எவ்வளவு?

யூக்ளிட் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்த,

$$256 = 1 \times 243 + 13$$
$$243 = 18 \times 13 + 9$$
$$13 = 1 \times 9 + 4 \;;\; 9 = 2 \times 4 + 1 \;;\; 4 = 4 \times 1 + 0$$

∴ 243, 256 ஆகியவற்றின் உ . பொ. கா. 1 ஆகும்.

$$1 = 9 - 2 \times 4 = 9 - 2[13 - 9] = 3 \times 9 - 2 \times 13$$
$$= 3\{243 - 18 \times 13\} - 2 \times 13$$
$$= 3 \times 243 - 56 \times 13$$
$$= 3 \times 243 - 56[256 - 1 \times 243]$$
$$= 59 \times 243 - 56 \times 256$$
$$= 59 \times 243 + (-56) \times 256$$

∴ $s = 59, \quad t = -56.$

எ. கா. 3 : $a > 0$, $a, b, c \in z$, எனின் $(ab, ac) = a(b, c)$ என நிறுவுக.

நிரூபணம் : $d = (b, c)$ என்போம்.

∴ $d \mid b,\ d \mid c;$ $a > 0$ ஆதலால் $ad \mid ab \quad ad \mid ac$ ... (1)

$h \neq 0 \quad h \mid ab \quad h \mid ac$ எனின் $h = k_1 ab \quad h = k_2 ac$ என எழுதலாம். $[k_1, k_2 \in z]$

$$\therefore\ k_1 ab = k_2 ac$$
$$\therefore\ k_1 b = k_2 c \qquad [\because a \neq 0]$$
$$\therefore\ k_2 c \mid b,\ k_1 b \mid c$$
$$(அ\text{-}து)\ \ k_1 b \mid b, \quad k_1 b \mid c$$
$$(அ\text{-}து)\ \ k_1 b \mid d \qquad [\because d = (b, c)]$$
$$\therefore\ k_1 b = k_3 d \qquad [k_3 \in z]$$
$$\therefore\ k_1 ab = k_3 ad$$

$\therefore\ h = k_3\, a\, d \qquad \therefore\ h \mid a\, d$

$\therefore\ h \mid a\, b,\ h \mid a\, c \Longrightarrow h \mid a\, d \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$

$(1), (2)$ – இவற்றிலிருந்து $a\, d = (a\, b,\ a\, c)$ என்பது தெளிவு.

(அ - து) $a\,(b, c) = (a\, b,\ a\, c)$

எ. கா. 4 : $(a, m) = (b, m) = 1$ என்றால் $(a\, b, m) = 1$ என நிறுவுக.

$$[a \neq 0,\ b \neq 0,\ m \neq 0,\ a, b, m \in z]$$

$(a, m) = 1 \Longrightarrow \exists\, s_1, t_1 \in z \mid s_1\, a + t_1\, m = 1 \qquad \ldots \quad (1)$

$(b, m) = 1 \Longrightarrow \exists\, s_2, t_2 \in z \mid s_2\, b + t_2\, m = 1 \qquad \ldots \quad (2)$

$(1)$ ஐயும், $(2)$ ஐயும் பெருக்க,

$$1 = s_1\, s_2\, a\, b + s_1\, t_2\, a\, m + s_2\, t_1\, b\, m + t_1\, t_2\, m^2$$
$$= s_1\, s_2\, a\, b + \{s_1\, t_2\, a + s_2\, t_1\, b + t_1\, t_2\, m\}\, m$$
$$= s_3\, a\, b + t_3\, m$$

$[s_3 = s_1\, s_2,\ t_3 = s_1\, t_2\, a + s_2\, t_1\, b + t_1\, t_2\, m$ எனக் கொள்க.]

$\therefore\ s_3, t_3 \in z,\ \ s_3\, a\, b + t_3\, m = 1$

$\therefore\ (a\, b, m) = 1$

குறிப்பு : $a \neq 0,\ b \neq 0,\ \exists\, s, t \in z \mid s\, a + t\, b = 1 \Longrightarrow (a, b) = 1$ ஆகும். இதன் நிரூபணம் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

எ. கா. 5 : நேர்ப் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை கந்தழி (Infinity) யாகும்.

நிரூபணம் : நேர்ப் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ளதாயிருந்தால், அந்த எண்ணை $n$ என்று குறிப்போம். ஆகையால் $p_1, p_2, \ldots \ldots, p_n$ என்று $n$ நேர்ப் பகா எண்கள் (Positive primes) உள்ளதென்போம். இவற்றைத் தவிர நேர்ப் பகா எண்கள் கிடையாது. $\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad (1)$

$b = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$ என்ற இயற்கை எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். எண் கணிதத்தின், அடிப்படைத் தேற்றத்தின்படி $b$ என்ற எண் ஒரு நேர்ப் பகா எண்ணாக இருக்கலாம். அல்லது நேர்ப் பகா எண்களின் பெருக்கலாக ஒரே ஒரு வழியில் தான் கூற

முடியும். $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் $b$ ஐ வகுக்காததாலும், இவற்றைத் தவிர வேறு பகா எண்கள் இல்லை யாதலாலும், $b$ யே ஒரு நேர்ப் பகா எண்ணாக இருக்கவேண்டும். மேலும் $a$ என்பது, $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ என்ற கணத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு நேர்ப் பகா எண்ணையும் விடப் பெரியது ஆதலால் $b \neq p_i$ $(1 \leq i \leq n)$

இது (1)-க்கு முரண்பாடாகும். ஆகையால் நேர்ப் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை ஒரு முடிவுள்ள எண் எனக் கொண்டது தவறு. ஆகையால் நேர்ப் பகா எண்களின் எண்ணிக்கை கந்தழியாகும்.

குறிப்பு: ஆகையால் பகா எண்களின் எண்ணிக்கையும் கந்தழியாகும்.

### பயிற்சி

1. பின் வருவனவற்றைக் காண்க.

   (i) $(148, 481)$

   (ii) $(231, 353)$

   (iii) $(2873, 6643) = x \times 2873 + y \times 6643$ $(x, y \in z)$ எனின் $x, y$ எவ்வளவு?

   (iv) $(36, 124) = s \times 36 + t \times 124$ எனின் $s, t$ எவ்வளவு?

   (v) $235\,m + 17\,n = 1$ எனின் $m, n$-ன் மதிப்பு என்ன?

   (vi) $6\,m + 35\,n = 1$ எனின் $m, n$-ன் மதிப்பு என்ன?

2. $a, b, m, n$ என்பவை Z-ல் பூச்சியமல்லாத எண்களாகும். $a\,m + b\,n = 1$ எனின் $(a, b) = (a, n) = (m, b) = (m, n) = 1$ என நிறுவுக.

3. 4586, 15435, 1365, 576, 504, 14[illegible], 48,000, 719, 1517 ஆகிய எண்களை நியம ரூபத்தில் (Standard form) எழுதுக.

4. $d = (a, b)$, $a = k\,d$, $b = l\,d$ எனின் $a, b$-ன் அ.பொ.ம $k\,l\,d$ எனக் காட்டுக.

5. $b, c$ என்பவை இயற்கை எண்களாகும். மேலும் $bc$ என்பது ஒரு முழு வர்க்கமாகும். $(b, c) = 1$ எனின் $b, c$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் முழு வர்க்கம் என நிறுவுக.

6. $d = (a, b)$ $a = kd$ $b = ld$ எனின் $(k, l) = 1$ என நிறுவுக.

7. $p, q$ என்பவை தனித்தனி (distinct) நேர்ப் பகா எண்கள் எனின் $xp + yq = 1, [x, y \in z]$ எனக் காட்டுக.

8. $p$ என்பது நேர்ப் பகா எண்ணாகவும், $a$ என்பது பூச்சியமல்லாத முழு எண்ணாகவும இருந்தால் $(a, p) = 1$ அல்லது $(a, p) = p$ எனக் காட்டுக.

9. $a = bc + d$ என்றால், $(a, c) = (c, d)$ எனக் காட்டுக.

10. பூச்சியமல்லாத மூன்று முழு எண்களுக்கு உ. பொ. கா. ஐ வரையறுத்து, அது இருப்பதற்குரிய தேற்றத்தையும் நிறுவுக. மேலும் $a, b, c$ என்ற பூச்சியமல்லாத மூன்று எண்களின் உ. பொ. கா. $d$ எனின், $d = ((a, b), c) = ((a, c), b)$ $(a, (b, c))$ என்றும், $a = kd$, $b = ld$, $c = ma$ எனின், $k, l, m$ என்ற மூன்று முழு எண்களின் உ. பொ. கா. 1 எனவும் நிறுவுக.

11. $(a, b) = c$, $a \mid d, b \mid d \Longrightarrow ab \mid cd$ என நிறுவுக. மேலும் $ab = c(a, b)$ என்றும் காட்டுக.

12. ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) D-ல் இரு அலகுக் காரணிகளின் பெருக்கல் ஓர் அலகுக் காரணி ஆகும்.

(ii) $a$ என்பது D-ல் ஓர் அலகுக் காரணி எனின் $a \mid d$ $\forall d \in D$.

(iii) $\forall z \in$ .., $a \mid z$ எனின் $a$ என்பது D-ல் ஓர் அலகுக் காரணி என நிறுவுக.

13. $2^n + 1$ $[n \in N]$ என்ற எண் ஒரு பகா எண் ஆனால், $n$ என்பது 2-ன் அடுக்கு (Power of 2) என நிறுவுக. இதிலிருந்து, $n$ என்ற இயற்கை எண் 2-ன் அடுக்காக

இல்லாவிடில், $2^n + 1$ என்ற எண் ஒரு கலவை எண்ணா குும் (Composite number) என நிறுவுக.

14. $p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்ணாயிருந்து $n$ எந்த ஓர் இயற்கை எண்ணாக இருந்தாலும் $n^p - n = M(p)$ என நிறுவுக. $n$. $p$ என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் எனின் (Relatively Prime) $n^{p-1} - 1 = M(p)$ என நிறுவுக. [குறிப்பு: இதுவே பர்மாட் (Fermat) தேற்ற மாகும்].

S $(n)$ = $\{n^p - n = M(p)\}$ $[n \in N]$ எனக் கொள்க. S (1) உண்மை. S (K) என்பது உண்மை எனின் S (K + 1) உண்மை என நிரூபிக்கலாம் ஆகையால் எல்லா இயற்கை எண் $n$-க்கும் S $(n)$ உண்மையாகும். $n^p - n = n(n^{p-1} - 1)$ ஆதலால் மற்ற முடிவும் உண்மை யாகும்.]

15. $p$, 3 ஐ விடப் பெரிய ஒரு நேர்ப் பகா எண் எனின் $p^2 - 1 = M(24)$ என நிறுவுக.

16. $a \in N$ எனின் $a^2 = 5m$ அல்லது $5m \pm 1$ $[m \in N]$ என்றவாறு இருக்கும் என நிரூபிக்க.

17. $a$ என்பது ஒற்றைப்படை இயற்கை எண் எனின் $a^2 = 8n + 1$ $[n \in N]$ என நிரூபிக்க.

18. $a, b, c$ என்பவை ஒன்றையொன்று சார்ந்த பகா எண்கள் ஆகும். $a^2 = b^2 + c^2$ எனின், $\exists\, m, n \in Z /$ $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ என நிறுவுக.

# VI. களங்கள்

## FIELDS

### 1. களத்தின் வரையறையும் சில பண்புகளும்

**1·1.** வரையறை : கோட்டக்களம் அல்லது வகுத்தல் வளையம் **(Skew Field or Division Ring)**

குறைந்தது இரு உறுப்புகள் கொண்ட வெறுமையற்ற கணம் F-ல் ( + ), '.' எனும் இரு ஈருறுப்புச் செயல்கள் வரையறுக்கப் பட்டு அச் செயல்களின் கீழ் F அடைப்புள்ளதாய் இருந்து, கீழ்க் கண்ட விதிகளை நிறைவு செய்தால் ( F, + , . ) என்னும் கணித அமைப்பு ஒரு கோட்டக் களம் அல்லது வகுத்தல் வளையம் (Skew Field or Division ring) எனப்படும்.

(i) (+) எனும் செயலின் கீழ் F ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவாகும் (Abelian group).

(ii) (+) எனும் செயலைக் கூட்டல் எனின், (.) எனும் செயலின் கீழ் F-ல் உள்ள கூட்டல் அலகு அல்லாத உறுப்புகள் ஒரு குழுவை அமைக்கும். [அபெல் குழுவாக இருக்க வேண்டும் என்ற தேவை யில்லை.]

(iii) கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை (Distributive law) நிறைவு செய்ய வேண்டும் (அ - து) $\forall\, a, b, c \in F$,

$a.(b + c) = a.b + a.c$ [வலது பங்கீட்டு விதி]

$(b + c).a = b.a + c.a$ [இடது ,, ,, ]

குறிப்பு : ஒவ்வொரு கோட்டக் களமும் அலகை உடைய ஒரு வளையமாகும். மேலும் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளுக்கு [கூட்டல் அலகைப் பூச்சியம் என்று அழைப்பது வழக்கம்] பெருக் கல் எதிர்மறைகள் அக்களத்தில் உள்ளன.

## 1·2. வரையறை : களம் (Field)

ஒரு கோட்டக் களத்தில் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல் பரிமாற்று விதியை நிறைவு செய்தால் அக்கோட்டக் களத்தைப் பரிமாற்றுக் கோட்டக் களம் (Commutative Skew Field) என்கிறோம்.

ஒவ்வொரு பரிமாற்றுக் கோட்டக் களமும் ஒரு களம் (Field) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு : ஒவ்வொரு களமும் ஓர் எண் அரங்கமாகும்.

எ. கா. 1. $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \Big/ a, b, \in c, \bar{a}, \bar{b}$ என் பவை முறையே $a$, $b$-ன் துணைச்சிக்கல் எண்களாகும். $\right\}$

என்ற கணம் ஒரு கோட்டக் களத்தை அமைக்கிறது.

2. களம் F-ன் மீது அமைந்து எல்லா $n \times n$ ஒருமை-இல் அணிகளையும் கொண்ட கணம் அணிகளின் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் ஒரு கோட்டக் களத்தை அமைக்கிறது.

3. $T = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \Big/ x \in R \right\}$ என்ற கணம் ஒரு கோட்டக் கணமாகும். இதில் $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ என்ற அணி கூட்டல் அலகாகும். $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ என்ற அணி T-ன் பெருக்கல் அலகாகும். $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை $\begin{pmatrix} -x & -x \\ -x & -x \end{pmatrix}$; பெருக்கல் எதிர்மறை $\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}$ $[x \neq 0]$ ஆகும்.

இவ்வணிகள் ஒருமைசேர் அணிகள் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

4. எல்லா விகிதமுறு எண்களும், வழக்கமான கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் ஒரு களத்தை அமைக்கும். எல்லா மெய்யெண்களும் அதே செயல்களின் கீழ் ஒரு களத்தை அமைக்கும். எல்லாச் சிக்கல் எண்களும் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் ஒரு களத்தை அமைக்கும். ஆனால் எல்லா முழு எண்களையும் கொண்ட கணம் Z ஒரு களத்தை அமைக்காது ஏன்?

5. $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ [ Q விகிதமுறு எண் களத்தைக் குறிக்கும்] என்பது ஒரு களமாகும். $S = \{a + bw \mid a, b \in Q$, $w$ என்பது 1-ன் கன மூலமாகும்.$\}$ என்ற கணம் ஒரு களத்தை அமைக்கும்.

6. $(Z_p, +, .)$ [ $p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண் ] என்பது ஒரு களமாகும்.

7. $T = \{x + iy \mid x, y \in Q\}$ என்ற கணம் ஒரு களத்தை அமைக்கும்.

1·3. வரையறை: முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட களம் முடிவுள்ள களம் (Finite Field) எனப்படும். அதனைக் கால்வாய்க் களம் [Galois Field] என்றும் கூறுவர்.

எ. கா. $(Z_p, +, .)$ ($p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்) என்பது முடிவுள்ள களமாகும்.

களங்களின் பண்புகள் [Properties of Fields]

1·4. (i) $a, b$ என்பவை களம் F-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகளாக இருக்கட்டும்; $a \neq 0$ எனின் $ax = b$ எனும் சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும் $x$ என்ற உறுப்பு F-ல் உண்டு. அது தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும். மேலும் $a^{-1}b$ என்பதே அந்த உறுப்பாகும். [$a^{-1}$ என்பது $a$-ன் பெருக்கல் எதிர்மறையைக் குறிக்கும்.]

(ii) ஓர் எண் அரங்கம் D-ல் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ள எண்ணாக இருந்தால் D ஒரு களமாகும்.

(iii) $(Z_p, +, .)$ [$p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்] என்பது ஒரு களமாகும்.

நிரூபணம்: $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$a \neq 0$ ஆதலால் $a^{-1} \in F$; மேலும் $a\,a^{-1} = e$ [F-ன் பெருக்கல் அலகு]

$a \,.\, [a^{-1}b] = [a\,a^{-1}]b = e.\,b = b$

$\therefore x = a^{-1}b$ என்ற F-ல் உள்ள உறுப்பு $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்கிறது.

ஆகையால் $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு F-ல் ஒரு தீர்வு உண்டு. அதே சமன்பாட்டிற்கு மற்றொரு தீர்வு F-ல் இருந்தால் அதனை $y$ என்க.

$\therefore \; ay = b \; [y \in F]$

இரு பக்கமும் இடப்புறத்தில் $a^{-1}$ ஆல் பெருக்க,

$a^{-1}[ay] = a^{-1}b$ (அ-து) $(a^{-1}a)y = a^{-1}b$

(அ-து) $(aa^{-1})y = a^{-1}b$

(அ-து) $ey = a^{-1}b$

(அ-து) $y = a^{-1}b$

ஆகையால் $ax = b$ என்ற சமன்பாட்டில் $x$-க்கு F-ல் $a^{-1}b$ என்ற ஒரே ஒரு தீர்வுதான் உண்டு.

(ii) எண் அரங்கம் D-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ள எண்ணாயிருக்கட்டும். D-ல் கூட்டல் அலகு அல்லாத உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ள எண்ணாதலால், அவைகளை வரிசைப்படுத்தி, $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ எனக் கொள்வோம். [$n$ என்பது முடிவுள்ள நேர் முழு எண்.]

A-ல் $a_k$ $(1 \leq k \leq n)$ என்ற யாதேனும் ஓர் உறுப்பை எடுத்துக் கொண்டு $B = \{a_1a_k, a_2a_k, \ldots\ldots a_na_k\}$ என்ற கணத்தை அமைப்போம். $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ என்பவற்றுள் ஒவ்வோர் உறுப்பும் பூச்சியமல்லாத (கூட்டல் அலகு அல்லது) உறுப்பு ஆதலால் $a_1a_k, a_2a_k, \ldots\ldots a_na_k$ என்பவை ஒவ்வொன்றும் பூச்சியமல்லாத உறுப்பாகும். [$\because$ D ஓர் எண் அரங்கம்] ஆகையால் கணம் B, D-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளைக் கொண்டது. கணம் A, D-ல் உள்ள எல்லாப் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளையும் கொண்டுள்ளதால் $B \subseteq A$ ஆகும்.

$a_ia_k = a_ja_k$ எனின் $a_i = a_j$ [$\because$ D ஓர் எண் அரங்கம்] ஆதலால் B-ல் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று வேறுபட்டவையாகும். (Distinct) ஆகையால் B-ல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $n$ B-ல் $n$ உறுப்புகள் உள்ளதாலும், A-லும் $n$ உறுப்புகள்தாம் இருப்பதாலும் $B \subseteq A$ ஆதலாலும் $B = A$ ஆகும்.

$e$ என்பது D-ல் உள்ள பெருக்கல் அலகைக் குறித்தால் $e$ ஒரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பாகும். $\therefore e \in A \quad \therefore e \in B$.

$\therefore$ ஏதாவது ஒரு $j$-க்கு $(1 \leq j \leq n)$ $a_ja_k = e$ ஆகும்.

∴ $a_k$-க்கு A-ல் ஓர் பெருக்கல் எதிர்மறை உண்டு.

$a_k$ என்பது A-ல் யாதேனும் ஓர் உறுப்பு ஆதலால் A-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும் அக்கணத்திலேயே ஒரு பெருக்கல் எதிர் மறை உண்டு.

ஆகையால் D-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பிற்கும் பெருக்கல் எதிர்மறை D-ல் உண்டு.

ஆதலால் D ஒரு களமாகும்.

(iii) $(Z_p, +, .)$ [$p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்] என்பதில் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ள எண் ஆதலாலும், அது ஓர் எண் அரங்கம் ஆதலாலும், அது ஒரு களமாகும்.

குறிப்பு: (i)-ல் $ax = b$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் $x = a^{-1}b = (ba^{-1})$ என்ற F-ல் உள்ள உறுப்பு $\frac{b}{a}$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. இதனை $b$ ஐ $a$ ஆல் வகுப்பதன் மூலம் கிடைக்கும் ஈவு [Quotient of $b$ by $a$] எனப்படுகிறது. $a \neq 0$ எனின் $\frac{e}{a} = a^{-1}$ ஆகும். [$e$ என்பது F-ன் பெருக்கல் அலகு ஆகும்]

## 1·5. ஈவுகளின் பண்புகள் [Properties of Quotients]

களம் F-ல் பின்வருவன உண்மையாகும்.

(i) $\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$ [$a \neq 0, b \neq 0$ $a, b \in F$]

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ [$b \neq 0, d \neq 0$]

(iii) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$ [ ,, ]

(iv) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ [ ,, ]

(v) $\frac{a}{b} + \frac{(-a)}{b} = 0$ [$b \neq 0$, $-a$ என்பது $a$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும்.]

(vi) $\frac{a}{b} \neq 0$, எனின் $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = e$

(vii) $\left(\frac{a}{b}\right) \Big/ \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ad}{bc}$

$[b \neq 0, d \neq 0]$

நிருபணம் : $\frac{1}{ab} = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ [ $\because$ F-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கலின் கீழ் அதில் உள்ள பூச்சியமல்லாத உறுப்புகள் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவை அமைக்கும்.)

$$= \left(\frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$$

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $[b \neq 0, d \neq 0]$ என்பது தரவு.

$$\therefore \ ab^{-1} = cd^{-1}$$

$$(ab^{-1})\,d = (cd^{-1})\,d = c\,(d^{-1}d)$$

$$= ce = c$$

$$\therefore \ (b^{-1}a)\,d = c$$

$$b\,(b^{-1}a)\,d = bc$$

$$\therefore \ (bb^{-1})\,(ad) = bc$$

$$\therefore \ ad = bc$$

$b \neq 0, \ d \neq 0, \ ad = bc$ எனின்,

$(ad)\,d^{-1} = (bc)\,d^{-1}$ [ $\because$ $b \neq 0, d \neq 0$. $b^{-1}, d^{-1}$ என்பவை F-ல் உள்ளன.]

$$a = (bc)\,d^{-1}$$

$$\therefore \ b^{-1}a = b^{-1}(bc)\,d^{-1}$$

$$\therefore \ ab^{-1} = cd^{-1} \qquad \therefore \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

(iii) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = ab^{-1} = cd^{-1}$ ... ... (1)

$$\frac{ad \pm bc}{bd} = (ad \pm bc)\;(bd)^{-1} = (ad \pm bc)\;(d^{-1}b^{-1})$$

$$= (ad)(d^{-1} b^{-1}) \pm (bc)(d^{-1} b^{-1})$$
$$= ab^{-1} \pm (cb)(b^{-1} d^{-1})$$
$$= ab^{-1} + cd^{-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = ab^{-1} \pm cd^{-1} \text{ ஆகும்.}$$

(iv) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = (a \cdot c)\ (b \cdot d)^{-1}$$
$$= (a \cdot c)[d^{-1} b^{-1}] = a.[(cd^{-1}) b^{-1}]$$
$$= a \cdot [(cb^{-1})\ d^{-1}] = a.[(b^{-1}c)\ d^{-1}]$$
$$= (a \cdot b^{-1}) \cdot (cd^{-1}) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ஆகும்.

மற்றவை பயிற்சியாக விடப்படுகின்றன.

## 1·6. வரையறை: உள் அடங்கு களம் (Subfield)

களம் F-ல், குறைந்தது இரு உறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் உள் அடங்கு கணம் F-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் பெருக்கல் என்று அழைக்கப்படும். இரு ஈறுப்புச் செயல்களின் கீழ் ஒரு களத்தை அமைத்தால், அக்களம் F-ன் உள் அடங்கு களம் [Subfield of F] என வரையறுக்கப்படுகிறது.

வரையறையிலிருந்து களம் F-ல் குறைந்தது இரு உறுப்புகளைக் கொண்ட ஓர் உள் அடங்கு கணம் K, உள் அடங்கு களமாவதற்குத் தேவையான போதுமான விதி, அக்கணம் கழித்தலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளதாக இருக்க வேண்டும். அக்கணத்தில் உள்ள பூச்சியமல்லாத எந்த ஓர் உறுப்பிற்கும் பெருக்கல் எதிர் மறை உறுப்பு அக்கணத்தில் இருக்க வேண்டும் என்பதாகும் என நிரூபிக்கலாம்.

ஒரு களத்தில் பல உள் அடங்கு களங்களின் வெட்டுக் கணமும் (Set intersection) ஓர் உள் அடங்கு களமாகும் என நிரூபிக்கலாம்.

எ. கா.: விகிதமுறு எண் களம் [Rational Field] மெய்யெண் களத்தின் உள் அடங்கு களமாகும். மெய்யெண் களம் [Real Field] சிக்கல் எண் களத்தின் உள் அடங்கு களமாகும்.

**1·7. ஒரு களத்தின் உள் அடங்கு கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள் அடங்கு களம் [Subfield generated by a subset of a field F]**

F என்ற களத்தில் M என்பது ஒரு வெறுமையற்ற உள் அடங்கு கணமாக இருக்கட்டும். M ஐ உள் அடங்கு கணமாகக் கொண்ட F-ன் எல்லா உள் அடங்கு களங்களின் வெட்டுக் கணம் F-ல் ஓர் உள் அடங்கு களமாகும். இக் களம் M ஆல் உருவாக்கப்பட்ட F-ன் உள் அடங்கு களம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

**1·8. ஒரு களத்தின் உள் அடங்கு களத்தோடு உறுப்புகளைச் சேர்த்தல் (Adjoining elements to a subfield of a field)**

F என்ற களத்தில் K என்பது யாதேனும் ஓர் உள் அடங்கு களமாக இருக்கட்டும் (Subfield of F). $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்பவை F-ல் எவையேனும் $n$ உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். [$n$ என்பது முடிவுள்ள மிகை முழு எண்.] $S = K \cup \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \ldots\ldots \cup \{a_n\}$ என்ற F-ன் உள் அடங்கு கணத்தால் உருவாக்கப்பட்ட உள் அடங்கு களம் $K(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ என்று குறிக்கப்படுகிறது. உள் அடங்கு களம் K உடன் $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ என்ற F-ல் உள்ள உறுப்புகளைச் சேர்ப்பதால் $K(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ என்ற உள் அடங்கு கணம் உண்டாகிறது எனக் கூறுகிறோம்.

எ. கா.: R என்பது மெய்யெண் களத்தையும், Q என்பது விகிதமுறு எண் களத்தையும் குறிக்கட்டும். $Q(\sqrt{2})$ என்ற R-ன் உள் அடங்கு களம் Q உடன் $\sqrt{2}$ ஐச் சேர்ப்பதால் உண்டாகிறது என்கிறோம். மேலும் $Q\sqrt{2} = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$ ஆகும்.

**1·9. பகாக்களம் [Prime Field]**

வெளிப்படை அல்லாத உள் அடங்கு களத்தைக் கொண்டிராத ஒரு களம் பகாக்களம் [Prime Field] எனப்படுகிறது. [F ஒரு களத்தைக் குறித்தால் F மட்டுமே அதன் வெளிப்படை உள் அடங்கு களமாகும் (Trivial subfield).]

விகித முறு எண் களமும், $(Z_p, +, \cdot)$ [$p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்] என்ற களமும் பகாக்களத்திற்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும்.

## 1·10. ஒரு களத்தின் குண எண் [Characteristic of a field]

F என்பது ஒரு களமாக இருக்கட்டும். F-ன் பெருக்கல் அலகு $e$ ஐ, F-ன் கூட்டல் குழுவின் உறுப்பாகக் கருதும்பொழுது, அதன் பரிமாணமே [order of $e$ as a member of the additive group of F] F-ன் குண எண் (Characteristic of F) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$e$-ன் பரிமாணம் முடிவுள்ள எண்ணாகவோ அல்லது முடிவிலா எண்ணாகவோ இருக்கலாம். அப் பரிமாணம் முடிவுள்ள எண்ணாக இருக்கும்பொழுது, அது ஒரு பகா எண் (Prime number) என நிறுவலாம்.

பரிமாணம் முடிவிலா எண்ணாக இருக்கும்பொழுது களத்தின் குண எண்ணை 0 என்று கூறுவோம். [சிலர் $\infty$ என்றும் கூறுவர்.] ஆகையால் ஒரு களத்தின் குண எண் 0 அல்லது ஒரு பகா எண்ணாக இருக்கவேண்டும்.

(எ-கா.) i) $(Z_p, +, \cdot)$ ($p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்) என்ற களத்தின் குண எண் $p$ ஆகும்.

ii) மெய்யெண் களம், விகிதமுறு எண் களம் ஆகியவை குண எண் 0 கொண்டவையாகும்.

## 1·11. Modular Field

வரையறை : 0 அல்லாத குண எண் கொண்ட களம் Modular Field எனப்படும்.

$(Z_p, +, \cdot)$ [$p$ ஒரு நேர்ப் பகா எண்] ஒரு Modular Field ஆகும்.

## 1·12. ஈவுக்களம் [Quotient Field]

தேற்றம்: F என்ற கோட்டக் களத்தில் D எனும் எண் அரங்கம் ஓர் உள் அடங்கு கணமாக உள்ளது. $Q = \left\{ \frac{a}{b} \Big/ a, b \in D, b \neq 0 \right\}$ என்ற கணம் F-ல் ஓர் உள் அடங்கு களமாகும்.

நிரூபணம்: $a, b$ $(b \neq 0)$ என்பவை D-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகளாக இருக்கட்டும். $a\,b = b\,a$ ஆதலால் [$\because$ D ஓர் எண் அரங்கம்],

$$b^{-1}(a\,b)\,b^{-1} = b^{-1}(b\,a)\,b^{-1} \quad [b^{-1} \in F]$$

(அ-து.) $(b^{-1} a)(b\, b^{-1}) = (b^{-1} b)(a\, b^{-1})$

(அ-து.) $b^{-1} a = a\, b^{-1} \in F$ ஆகையால் $a$-ம், $b^{-1}$-ம், பரிமாற்று விதியை (Commutative law) நிறைவு செய்கின்றன. $b^{-1} a = a\, b^{-1} = \frac{a}{b}$ என்று குறிப்பது பொருத்தமாகும்.

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle/ a, b \in D,\ b \neq 0 \right\}$ என்ற கணத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். Q-ல் கூட்டலும் பெருக்கலும் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$\forall\ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \quad [b, d \neq 0,\ \ a, b, c, d \in D]$

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$b \neq 0, d \neq 0$; D ஓர் எண் அரங்கம் ஆதலால் $b\,d \neq 0$

$\therefore \quad \frac{a\,d+bc}{b\,d} \in Q$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in Q \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Longleftrightarrow a\,b' = a'\,b$ ஆகும். [1·5 ஐப் பார்க்க.]

மேலும் $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ எனின், $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}$

என்றும், $\left(\frac{a}{b}\right) \otimes \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a'}{b'}\right) \otimes \left(\frac{c'}{d'}\right)$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

ஆகையால் கூட்டலும், பெருக்கலும் Q-ல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டனவாகும் (Well defined). கூட்டல் பலனும் பெருக்கல் பலனும் Q-ல் உள்ளதால் இச் செயல்களுக்கு Q அடைப்புள்ளதாகும். [(3)-லிருந்து.] ...... (4)

Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், சேர்ப்பு விதி (Associative law), பரிமாற்று விதி (Commutative law) ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது என எளிதாக நிரூபிக்கலாம். ...... (5)

$e$ என்பது D-ல் பெருக்கல் அலகு எனின் $\frac{0}{e} \in Q$. மேலும் இந்த உறுப்பு Q-ல் கூட்டல் அலகாகும் (Additive identity) ......(6)

[ஏனெனில் $\forall \frac{a}{b} \in Q, \frac{a}{b} \oplus \frac{0}{e} = \frac{ae+0}{be} = \frac{a}{b}$, இதேபோன்று $\frac{0}{e} \oplus \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$]. $\frac{a}{b}$ என்பது Q-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாக இருந்தாலும், $\frac{-a}{b}$ என்பது [$-a$ என்பது D-ல் $a$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை] Q-ல் உள்ளது. மேலும் $\frac{-a}{b}$ என்பது $\frac{a}{b}$-ன் கூட்டல் எதிர் மறையாகும் (Additive inverse). ...... (7)

$$\left[\text{ஏனெனில் } \frac{a}{b} \oplus \frac{-a}{b} = \frac{ab+(-a)b}{b^2} = \frac{\{a+(-a)\}b}{b^2} = \frac{0}{b^2} = \frac{0}{e}\right]$$

(3)—(7) ஆகியவற்றிலிருந்து Q, அதில் வரையறுக்கப்பட்ட $\oplus$ எனும் செயலின் கீழ் அடைப்புள்ளது எனத் தெரிகிறது. ... (8)

Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல் சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்கிறது என நிறுவலாம். ...... (9)

$e$ என்பது D-ல் பெருக்கல், அலகு எனின் $e/e$ என்பது Q-ல் பெருக்கல் அலகு ஆகும். $\left[\text{ஏனெனில் } \forall \frac{a}{b} \in Q, \frac{a}{b} \otimes \frac{e}{e} = \frac{a.e}{b.e} = \frac{a}{b}\right]$ .... (10)

$\frac{a}{b}$, $a \neq 0$ என்பது Q-ல் பூச்சியமல்லாத எந்த ஓர் உறுப்பாக இருந்தாலும் $\frac{b}{a}$ என்பது Q-ல் உள்ளது. மேலும் $\frac{a}{b} \otimes \frac{b}{a} = \frac{e}{e}$ ஆகும்.

$$\left[\frac{a}{b} \otimes \frac{b}{a} = \frac{a.b}{b.a} = \frac{a.b}{a.b} = \frac{e}{e}\right]$$

ஆகையால் $\frac{b}{a}$ என்ற உறுப்பு $\frac{a}{b}$-ன் Q-ல் உள்ள பெருக்கல் எதிர்மறை ஆகும். ...... (11)

(8), (9)–(11) ஆகியவற்றிலிருந்து Q-ல் உள்ள பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளால் ஆன கணம் Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட $\otimes$ எனும் செயலின் கீழ் ஓர் அபெல் குழுவை அமைக்கிறது. ......(12)

மேலும்,

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q, \quad \frac{a}{b} \otimes \left[\frac{c}{d} \oplus \frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b} \otimes \left[\frac{cf+de}{df}\right]$$

$$= \frac{a.(cf+de)}{b.(df)} = \frac{acf+ade}{bdf}$$

$$= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \oplus \frac{a \cdot e}{b \cdot f}$$

$$= \left[\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}\right] \oplus \left(\frac{a}{b}\right) \otimes \left(\frac{e}{f}\right)$$ ஆகும். இதேபோன்று

$\left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right) \otimes \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \otimes \frac{e}{f} \oplus \frac{c}{d} \otimes \frac{e}{f}$ என நிறுவலாம்.

ஆகையால் கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன. ...... (13)

(8), (12), (13) ஆகியவற்றிலிருந்து Q ஒரு களம் என்பது தெளிவு. $a$ என்பது D–ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும்.

$a = \frac{ae}{e} \in Q$ $\quad\quad$ ∴ $D \subseteq Q$ ஆகும்.

மேலும் $\forall \frac{a}{b} \in Q \quad \frac{a}{b} = a\,b^{-1} \;(= b^{-1} a) \;\in F$

∴ $Q \subseteq F$.

∴ $D \subseteq Q \subseteq F$. ஆகையால் Q என்பது F-ன் உள் அடங்கு களமாகும்.

**1·12.** வரையறை: மேற்கூறிய முறையில் ஒரு களத்தின் உள் அடங்கு கணமாக உள்ள எண் அரங்கம் D–லிருந்து அமைக்கப்

பட்ட F-ன் உள் அடங்கு களம் Q, D-ன் ஈவுக் களம் அல்லது பின்னக் களம் எனப்படுகிறது. [Field of Quotients or field of fractions]

குறிப்பு: D-லிருந்து அமைக்கப்பட்ட களம் Q, D ஐ உள் அடங்கு கணமாகக் கொண்ட களங்கள் அனைத்திலும் மிகச் சிறிய தாகும். ஏனெனில் $F'$ என்ற களம் D ஐ உள் அடங்கு கணமாகக் கொண்டுள்ளது என்க.

$\therefore \; \forall \; \frac{a}{b} \in Q, \; [a, b \in D, b \neq 0] \quad a \in F', b \in F' \; [\because D \subseteq F]$

$\therefore \; a\, b^{-1} \in F'$ [$\because$ $F'$ என்பது ஒரு களம்]

$\therefore \; \frac{a}{b} \in F'$

$\therefore \; Q \subseteq F'$ ஆகும்.

எ. கா. 1: முடிவுள்ள எண்ணிக்கையுள்ள உறுப்புகளைக் கொண்ட எந்த ஓர் எண் அரங்கத்தின் ஈவுக் களமும் அதுவே யாகும். [ஏன்? விளக்குக.]

2. மெய்யெண் களத்தின் உள் அடங்கு கணமான முழு எண் களின் எண் அரங்கம் Z–ன் ஈவுக்களம் விகிதமுறு எண் களமாகும்.

3. $S = \{a + i\,b \mid a, b \in Z\}$ என்பது ஓர் எண் அரங்க மாகும். இதன் ஈவுக்களம் $T = \{x + i\,y \mid x, y \in Q\}$ என்ற களமாகும். $a + i\,b, a, b \in Z$ என்ற எண் காசியன் எண் [Gaussian Integer] எனப்படுகிறது.

1·13. தேற்றம்: இரு கோட்டக் களங்களில் உள் அடங்கு கணங்களாக உள்ள இரு எண் அரங்கங்கள் அமைப்பில் ஒன்று னவையாக இருந்தால் (Isomorphic), அவற்றின் ஈவுக் களங்களும் அமைப்பில் ஒன்றுனவையாக இருக்கும்.

[குறிப்பு: இரு எண் அரங்கங்களுக்கிடையே அல்லது இரு ஈவுக் களங்களுக்கிடையே ஓரினச் சார்பு அவைகளை வளையங்க ளாகக் கருதி வரையறுக்கப்படுகிறது.]

நிரூபணம்: D, $D'$ என்பவை முறையே F, $F'$ என்ற கோட்டக் களங்களின் உள் அடங்கு கணங்களாக உள்ள இரு எண் அரங்கங்களாகவும், $Q, Q'$ என்பவை முறையே அவற்றின் ஈவுக் களங்களாகவும் இருக்கட்டும்.

$D \cong D'$ என்பது தரவு.

$Q \cong Q'$ என்று நிரூபிக்க வேண்டும்.

$\alpha : x \in D \to x' = x\alpha \in D'$ என்பது D-லிருந்து D'-க்கு ஒரு முழு ஓரினச் சார்பாக இருக்கட்டும் (on to isomorphism). Q-லிருந்து Q'-க்கு ஓர் அமைப்பு மாற்றம் $\beta$ பின்வரும் முறையில் வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\beta : \frac{a}{b} \in Q \to \frac{a'}{b'} \in Q' \; [a' = a\alpha, \quad b' = b\alpha \text{ ஆகும்.}]$$

$\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ என்பவை Q-ல் ஏவையேனும் இரு உறுப்புகளாக இருந்து,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\beta = \left(\frac{c}{d}\right)\beta \text{ எனின், } \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$$

$\implies a'd' = b'c'$

$\implies (a\alpha)(d\alpha) = (b\alpha)(c\alpha)$

$\implies (ad)\alpha = (bc)\alpha$ [ ∵ $\alpha$ என்பது ஓர் ஓரினச் சார்பு]

$\implies ad = bc$ [ ,, ,, ]

$\implies \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

∴ $\beta$ ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும். [One to one mapping] ... ... (1)

$\frac{x'}{y'}$ என்பது Q-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும்.

∴ $x' \in D', y' \in D', [y' \neq 0']$

$\alpha$ என்பது D-லிருந்து D'-க்கு முழு அமைப்பு மாற்றமாதலால், (on to mapping) $\exists\, x, y \in D$, $[y \neq 0]$ / $\alpha : x \to x' = x\alpha$
$\alpha : y \to y' = y\alpha$

$$\therefore \exists \frac{x}{y} \in Q \;/\; \beta : \frac{x}{y} \to \frac{x'}{y'}$$

∴ $\beta$ என்பது ஒரு முழு அமைப்பு மாற்றமாகும் [on to mapping]. ... ... (2)

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q, \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)\beta = \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\beta$$

$$= \frac{(ad+bc)\alpha}{(bd)\alpha} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$$

[∵ $\alpha$ என்பது ஓர் ஓரினச் சார்பு ஆகும்.]

$$= \frac{a'}{b'} \boxplus \frac{c'}{d'} = \left(\frac{a}{b}\right)\beta \boxplus \left(\frac{c}{d}\right)\beta$$

$$\left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}\right)\beta = \left(\frac{ac}{bd}\right)\beta = \frac{(ac)\alpha}{(ba)\alpha} = \frac{a'c'}{b'd'}$$

[∵ $\alpha$ என்பது ஓர் ஓரினச் சார்பு ஆகும்.]

$$= \left(\frac{a'}{b'}\right) \boxtimes \left(\frac{c'}{d'}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\beta \boxtimes \left(\frac{c}{d}\right)\beta$$

∴ $\beta$ என்பது ஒரு புனல் சார்பு (Homomorphism) ஆகும். ...... (3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து $\beta$ என்பது Q-விருந்து Q′-க்கு, ஒரு முழு ஓரினச் சார்பு ஆகும் [on to isomorphism].

∴ $Q \cong Q'$

குறிப்பு : மேற்கூறிய தேற்றத்திலிருந்து, ஓர் எண் அரங்கத்திற்கு ஈவுக் களம் இருந்தால் அது ஓரினச் சார்பு அளவில் தனித்தன்மை வாய்ந்தது (Unique upto isomorphism) என்பது தெளிவு.

## 1·14. ஓர் எண் அரங்கத்திலிருந்து ஈவுக் களத்தை அமைத்தல் (Construction of the quotient field from an integral domain)

ஓர் எண் அரங்கம் ஒரு கோட்டக் களத்தின் உள் அடங்கு கணமாக இருந்தால், அந்த அரங்கத்திலிருந்து எவ்வாறு ஈவுக் களத்தை அமைப்பது என்று பார்த்தோம். ஆனால் அந்த அரங்கத்தை உள் அடக்கும் ஒரு கோட்டக் களத்தின் இருக்கும் தன்மையைப் பற்றி யாதும் தெரியாத நிலைமையில் எவ்வாறு ஒரு களத்தை

அமைத்து அதில் அந்த எண் அரங்கத்தைப் பதிப்பது [embed] என்பது பற்றி இனிமேல் பார்ப்போம்.

<u>தேற்றம்</u> : குறைந்தது இரு உறுப்புகள் கொண்ட எந்த ஓர் எண் அரங்கத்தையும் ஒரு களத்தில் பதிக்கலாம் [Any integral domain with atleast two elements can be embedded in a field].

நிரூபணம் : D என்பது குறைந்தது இரு உறுப்புகள் கொண்ட எண் அரங்கமாக இருக்கட்டும். $S = \{$வரிசைப்பட்ட ஜோடி $(a, b) \mid a, b \in D, b \neq 0\}$ என்ற முறையில் கணம் S அமைக்கப்படுகிறது.

கணம் S-ல் $\sim$ என்று குறிக்கப்படும் தொடர்பு பின்வரும் வகையில் வரையறுக்கப்படுகிறது. $\forall (a, b), (c, d) \in S$, $(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc$

இத்தொடர்பு ஒரு சரி நிகர்த் தொடர்பு [Equivalence relation] ஆகும்.

[ஏனெனில் $ab = ba$ ஆதலால் $(a, b) \sim (a, b)$

$\therefore \sim$ என்பது பிரதிபலிக்கும் தன்மை (reflexive) உடையது.

$(a, b) \sim (c, d)$, எனின்,

$$ad = bc \quad \therefore cb = da \quad [\because a, b, c, d \in D]$$

$$\therefore (c, d) \sim (b, a)$$

$\therefore \sim$ சமச்சீர்த் தன்மை (Symmetric) வாய்ந்தது.

$(a, b) \sim (c, d)$, $(c, d) \sim (e, f)$ எனின்,

$ad = bc$, $cf = de$ ஆகும்.

$$\therefore adf = bcf$$

$$= bde \quad [\because cf = de]$$

$\therefore afd = bed \quad \therefore af = be \quad [\because d \neq 0$, D ஓர் எண் அரங்கம்$]$

$\therefore (a, b) \sim (e, f)$

$\therefore \sim$ கடத்தும் தன்மை (Transitive) கொண்டது.

ஆகையால் $\sim$ ஒரு சரி நிகர்த் தொடர்பு (Equivalance relation) ஆகும் ]

இச் சரி நிகர்த் தொடர்பு, S ஐ ஒன்றுக்கொன்று பிரிந்த சரி நிகர் வகுப்புகளாகப் பிளவு படுத்துகிறது. [S is partitioned into disjoint equivalence classes.] ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள உறுப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று சரி நிகராகும்.

$(a, b)$ ஐக் கொண்டிருக்கும் வகுப்பை $\left[\frac{a}{b}\right]$ என்று குறியீடு செய்வோம்.

$$\therefore \left[\frac{a}{b}\right] = \left\{ (x, y) \in S \;/\; x, y \in D, y \neq 0 \;\; xb = ya \right\}$$

கணம் S-ன் எல்லாச் சரி நிகர் வகுப்புகளையும் உறுப்புகளாகக் கொண்ட கணத்தை Q என்று குறிப்போம்.

$$\therefore Q = \left\{ \left[\frac{a}{b}\right], \dots\dots\dots\dots \right\}$$

Q ஒரு களம் என்றும் D ஐ அதில் பதிக்கலாம் என்றும் நிறுவ வேண்டும்.

Q-ல் கூட்டலும் பெருக்கலும் பின்வரும் வகையில் வரையறுக் படுகின்றன.

$$\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{c}{d}\right] \in D \text{ எனின், } \left[\frac{a}{b}\right] \oplus \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{ad + bc}{bd}\right]$$

$$\left[\frac{a}{b}\right] \otimes \left[\frac{c}{d}\right] = \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right]$$

$$(ad + bc, bd) \in S, \quad (ac, bd) \in S$$

$$\text{ஆதலால், } \left[\frac{ad + bc}{bd}\right] \in Q, \quad \left[\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right] \in Q$$

∴ கணம் Q அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளது. மேலும் கூட்டலும் பெருக்கலும் வகுப்புகளிடையே வரையறுக்கப்பட்டவை. அவை அவ்வகுப்புகளில் உள்ள உறுப்புகளைச் சார்ந்து இல்லை.

கூட்டலும் பெருக்கலும் Q-ல் நன்கு வரையறுக்கப்பட்டனவாகும் (Well defined) என நிரூபிக்கலாம். மேலும் கூட்டல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்யும் என்றும் நிறுவலாம்.

$e$ என்பது D-ல் பெருக்கல் அலகு எனின் $\left[\frac{0}{e}\right]$ என்ற உறுப்பு Q-ல் கூட்டல் அலகு ஆகும். [$0$ என்பது D-ன் கூட்டல் அலகைக் குறிக்கும்.]

[ஏனெனில் $\forall \left[\frac{a}{b}\right] \in Q$, $\left[\frac{a}{b}\right] \oplus \left[\frac{0}{e}\right] = \left[\frac{ae+b.0}{be}\right]$
$= [a/b]$

இதே போன்று $\left[\frac{0}{e}\right] + \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$ ஆகும்.]

$\left[\frac{a}{b}\right]$ என்பது Q-ல் எந்த உறுப்பாக இருந்தாலும் $\left[\frac{-a}{b}\right]$ என்பது Q-ல் $\left[\frac{a}{b}\right]$-ன் கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும். [ஏனெனில் $\left[\frac{-a}{b}\right] \in Q$, $\left[\frac{-a}{b}\right] \oplus \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{-ab+ab}{b^{2}}\right] = \left[\frac{0}{b^{2}}\right]$
$= \left[\frac{0}{e}\right]$

இதேபோன்று $\left[\frac{a}{b}\right] \oplus \left[\frac{-a}{b}\right] = \left[\frac{0}{e}\right]$ ஆகும்.

∴ கூட்டலின் கீழ் Q ஓர் அபெல் குழுவாகும் ......... (1) Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்யும் என நிரூபிக்கலாம். மேலும் கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை (Distributive laws) நிறைவு செய்கிறது எனவும் நிறுவலாம். ....... ...(2)

$\left[\frac{e}{e}\right] \in Q$, மேலும் $[e/e]$ என்ற உறுப்பு Q-ல் பெருக்கல் அலகு ஆகும். [ஏனெனில் $\forall \frac{a}{b} \in Q$, $\left[\frac{a}{b}\right] \otimes \left[\frac{e}{e}\right] = \left[\frac{ae}{be}\right] =$
$\left[\frac{a}{b}\right]$

$\left[\frac{e}{e}\right] \times \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{ea}{eb}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$

Q-ல் $\left[\frac{a}{b}\right]$ என்பது எந்த பூச்சியமல்லாத உறுப்பாக இருந்-

தாலும், [(அ-து.) $a \neq 0$, $a \in D$ என்று இருக்க வேண்டும்.) $\left[\frac{b}{a}\right]$ என்ற உறுப்பு Q-ல் உள்ளது. மேலும் $\left[\frac{a}{b}\right] \otimes \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{b}{a}\right] \otimes \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{e}{e}\right]$ ஆகும்.

ஆகையால் $\left[\frac{b}{a}\right]$ என்ற Q-ல் உள்ள உறுப்பு $\left[\frac{a}{b}\right]$ – ன் பெருக்கல் எதிர்மறை ஆகும்.

ஆகையால் பெருக்கலின் கீழ் Q ஓர் அபெல் குழுவாகும்.

…………(3)

(1), (2), (3) ஆகியவற்றிலிருந்து, Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் Q ஒரு களமாகும்.

Q-ன் உள் அடங்கு கணம் T, பின் வருமாறு அமைக்கப்படுகிறது.

$$T = \left\{ \left[\frac{a}{e}\right] \in Q \middle/ a \in D \right\}$$

$T \subseteq Q$. மேலும் $\forall \left[\frac{a}{e}\right], \left[\frac{b}{e}\right] \in T$,

$$\left[\frac{a}{e}\right] \oplus \left[\frac{b}{e}\right] = \left[\frac{ae + be}{e^2}\right] = \left[\frac{a+b}{e}\right] \in T$$

$$\left[\frac{a}{e}\right] \oplus \left[\frac{b}{e}\right] = \left[\frac{a\,b}{e^2}\right] = \left[\frac{ab}{e}\right] \in T.$$

∴ T என்பது Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் அடைப்புள்ளது. ………… (4)

D-லிருந்து T-க்கு, $\alpha$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\alpha : a \in D \rightarrow \left[\frac{a}{e}\right] = a\alpha \in T$$

$a, b$ என்பவை D-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகளாயிருந்து, $a\alpha = b\alpha$ எனின்,

$$\left[\frac{a}{e}\right] = \left[\frac{b}{e}\right]$$
$$\Longrightarrow (a, e) \sim (b, e)$$
$$\Longrightarrow ae = eb \quad \Longrightarrow a = b.$$

∴ $\alpha$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும் [One to one mapping]. ............ (5)

T-ல் உள்ள எந்த உறுப்பும் $\left[\frac{p}{e}\right]$, $p \in$ D என்று இருப்பதால் $\alpha : p \in D \rightarrow \left[\frac{p}{e}\right] \in T$ ஆகும். ∴ $\alpha$ என்பது முழு அமைப்பு மாற்றம் ஆகும் [on to mapping]. ............ (6)

மேலும் $\forall\ a, b \in D, \quad (a+b)\alpha = \left[\frac{a+b}{e}\right]$

$$= \left[\frac{a}{e}\right] \oplus \left[\frac{b}{e}\right]$$

$$(a\,.\,b)\alpha = \left[\frac{a\,.\,b}{e}\right]$$

$$= \left[\frac{a}{e}\right] \otimes \left[\frac{b}{e}\right]$$

∴ $\alpha$ என்பது D-லிருந்து T-க்கு ஒரு புனல் சார்பாகும் [Homomorphism]. ............ (7

(5) - (7) ஆகியவற்றிலிருந்து $\alpha$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் D-லிருந்து T-க்கு ஒரு முழு ஓரினச்சார்பு ஆகும் [on to isomorphism].

∴ $D \cong T$.

D ஓர் எண் அரங்கம் ஆதலாலும் T என்ற கணம் கூட்டலுக்கும் பெருக்கலுக்கும் அடைப்புள்ளதாலும் [(4) -லிருந்து] $D \cong T$ ஆதலாலும், T ஓர் எண் அரங்கம் எனக் கிடைக்கிறது.

$D \cong T$ ஆதலால் அமைப்பில் D-ம், T-ம் ஒன்றுனவையாகும். ஆதலால் T ஐ D ஆகவே கருதலாம்.

ஆகையால் D-லிருந்து ஒரு புதிய களம் Q ஐ உண்டாக்கி, அதனுள் D ஐப் பதித்து (embed) விட்டோம்.

குறிப்பு 1: இத்தேற்றம், V, 3·5-ல் கூறிய தேற்றத்தைப் போன்று உள்ளது என்பதைக் காணவும்.

குறிப்பு 2: $\alpha : a \in D \to \left[\frac{a}{e}\right] \in T$,

$$\alpha : b \in D \to \left[\frac{b}{e}\right] \in T \text{ என்க.}$$

$$\left[\frac{a}{b}\right] \in Q, \text{ மேலும் } \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{a}{e}\right] \otimes \left[\frac{e}{b}\right]$$

$$= \left[\frac{a}{e}\right] \otimes \left[\frac{b}{e}\right]^{-1}$$

$D \cong T$ ஆதலால், $\left[\frac{a}{b}\right]$ என்ற Q-ல் உள்ள உறுப்பை $ab^{-1}$ என்று எழுதலாம்.

**1·15. தேற்றம்:** D என்ற எண் அரங்கம் F என்ற கோட்டக் களத்தின் உள் அடங்கு கணமாக இருக்கட்டும். D-ன் ஈவுக் களமும், 1·14 தேற்றத்தில் D-லிருந்து அமைக்கப்பட்ட களமும், அமைப்பில் ஒன்றுனவையாகும் [Isomorphic].

நிருபணம்: $Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle/ a, b \in D,\ b \neq 0 \right\}$

[D-ன் ஈவுக் களம்]

$$Q' \quad \left\{ \left[\frac{a}{b}\right], \dots\dots\dots \right\} \text{ என்க.}$$

[1·14 தேற்றத்தில் அமைக்கப்பட்ட களம்]

Q-லிருந்து Q′-க்கு $\gamma$ என்ற அமைப்பு மாற்றம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\gamma : \frac{a}{b} \in Q \to \left[\frac{a}{b}\right] = \left(\frac{a}{b}\right)\alpha \in Q'$$

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ என்பவை Q-ல் எவையேனும் இரு உறுப்புகளாயிருந்து,

$$\left(\frac{a}{b}\right)\gamma = \left(\frac{c}{d}\right)\gamma \text{ எனின் } \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$$

$$\Longrightarrow (a, b) \sim (b, d)$$

$$\Longrightarrow ad = bc$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

$\therefore$ $\gamma$ என்பது ஒன்றுக்கொன்று அமைப்பு மாற்றமாகும்.......(1)

$\left[\frac{x}{y}\right]$ என்பது Q′-ல் எந்த ஓர் உறுப்பாகவும் இருக்கட்டும்.

$\therefore x, y \in D, y \neq 0 \qquad \therefore \frac{x}{y} \in Q$

மேலும் $\gamma : \frac{x}{y} \in Q \to \left[\frac{x}{y}\right] \in Q'$

$\therefore$ $\gamma$ என்பது முழு அமைப்பு மாற்றமாகும்: ...... (2)

$$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right)\alpha = \left(\frac{ad+bc}{bd}\right)\alpha$$

$$= \left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$$

$$= \left[\frac{a}{b}\right] \boxplus \left[\frac{c}{d}\right]$$

$$= \left[\frac{a}{b}\right]\alpha \boxplus \left[\frac{c}{d}\right]\alpha$$

$$\left(\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}\right)\alpha = \left(\frac{ac}{bd}\right)\alpha = \left[\frac{ac}{bd}\right] = \left[\frac{a}{b}\right] \boxtimes \left[\frac{c}{d}\right]$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)\alpha \boxtimes \left(\frac{c}{d}\right)\alpha.$$

$\therefore$ $\alpha$ என்பது Q-லிருந்து Q′-க்கு ஒரு புனல் சார்பு (Homomorphism) ஆகும். ...... (3)

$\therefore \quad Q \cong Q'$.

குறிப்பு 1: $Q \cong Q$. ஆகலால், $Q'$ ஐயும் D-ன் ஈவுக்களம் என்று கூறலாம். மேலும் $Q'$-ம் D ஐ உள் அடங்கு கணமாகக் கொண்ட களங்களில் மிகச் சிறிய களமாகும்.

குறிப்பு 2: $\gamma: \frac{a}{b} \in Q \to \left[\frac{a}{b}\right] \in Q'$ ஆதலால் $\left[\frac{a}{b}\right]$ ஐ ஈவு (Quotient) என்றே கூறலாம்.

**1·16.** முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z-லிருந்து விகிதமுறு எண் களம் R ஐ அமைத்தல் (Construction of Rational Numbers from Integers)

முழு எண்களின் எண் அரங்கம் Z, பல சிறப்பான பண்புகளைப் பெற்றிருந்தாலும் அது முற்றுப் பெற்றதாக இல்லை. ஒரு சாதாரண சமன்பாடு $2x = 1$ என்பதைக்கூட Z-ல் தீர்க்க முடியவில்லை. இதற்குக் காரணம் Z-ல் உள்ள உறுப்புகளுக்குப் பெருக்கல் எதிர்மறை (Multiplicative inverses) Z-ல் இல்லை. இத்தடை எல்லா எண் அரங்கங்களுக்கும் பொதுவானது. இத்தடையை நீக்குவதற்கு $ax = b, a \neq 0, a, b \in D$ போன்ற சமன்பாடுகளின் தீர்வுகளை அடக்கியிருக்கும் ஒரு புதிய களம் அமைத்து அதில் அந்த எண் அரங்கத்தைப் பதித்தோம். இதே முறையைப் பின்பற்றி Z-லிருந்து ஒரு புதிய களம் Q ஐ அமைத்து அதில் Z ஐப் பதிக்கலாம் (embed). இப்புதிய களமே விகிதமுறு எண் களம் (Rational Field) எனப்படுகிறது.

$Q = \left\{\left[\frac{a}{b}\right], \ldots\ldots, a, b \in Z, b \neq 0\right\}$, Q தனித்தன்மை வாய்ந்ததாகும். Z ஐ உள் அடங்கு கணமாகக் கொண்ட களங்களின் மிகச் சிறியதாகும். Q ஐ வழக்கமாக $Q = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \frac{a}{b}, \ldots\ldots, b \neq 0, a\, b \in z\right\}$ என்று எழுதுகிறோம்.

**1·17.** வரிசைப்பட்ட களங்கள் [Ordered Fields]

வரையறை: ஒரு களத்தை எண் அரங்கமாகக் கருதும்பொழுது வரிசைப்பட்டதாக இருந்தால் அக்களம் வரிசைப்பட்ட களம் [Ordered Field] என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எ.கா. விகித முறு எண் களமும், மெய்யெண் களமும் வரிசைப்பட்ட களங்களாகும்.

1·18. விகிதமுறு எண் களத்தின் அமைப்பு [Structure of Rational Field]

(1) இயல் முறை கணித அமைப்பு (Algebraic Structure)

விகித முறு எண் களத்தை Q என்று குறிப்போம்.

(a) Q-ல் கூட்டல், பெருக்கல் எனும் இரு ஈருறுப்புச் செயல்கள் (Two binary operations) வரையறுக்கப்பட்டுள்ளன. அச்செயல்களின் கீழ் Q அடைப்புள்ளதாகும் (Closed).

(b) Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், சேர்ப்பு (Associative), பரிமாற்று (Commutative), நீக்கல் (Cancellation) விதிகளை நிறைவு செய்கிறது. (அ-து.) $\forall\, a, b, c \in Q$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a + b = b + a$$
$$a + b = a + c \Longrightarrow b = c.$$

(c) Q-ல் ஒரே ஒரு கூட்டல் அலகு [Additive identity] உண்டு. அது 0 ஆகும. மேலும் $\forall\, x \in Q$, $x + 0 = 0 + x = x$.

(d) Q-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிற்கும ஒரே ஒரு கூட்டல் எதிர்மறை Q-ல் உண்டு. [Additive inverse] (அ-து.) $x$ என்பது Q-ல் எந்த எண்ணாக இருந்தாலும $-x$ எனற எண Q-ல உள்ளது.

மேலும் $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

[சுருங்கக் கூறின், Q அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டலின் கீழ் ஒரு பரிமாற்றுக் குழுவை அமைக்கிறது.]

(e) Q-ல் வரையறுக்கப்பட்ட பெருக்கல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று, நீக்கல் விதிகளை நிறைவு செய்கிறது.

(அ-து.) $\forall\, a, b, c \in Q \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

$$a \cdot b = b \cdot a$$
$$a \cdot b = a \cdot c,\ a \neq 0 \text{ எனின் } b = c.$$

(f) Q-ல் ஒரே ஒரு பெருக்கல் அலகு [Multiplicative identity] உண்டு. அது எண் 1 ஆகும. $\forall\, x \in Q$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

(g) Q-ல் உள்ள ஒவ்வொரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பிற்கும் [கூட்டல் அலகு பூச்சியம் எனப்படும்] ஒரே ஒரு பெருக்கல் எதிர் மறை (Multiplicative inverse) Q-ல் உண்டு (அ - து.) $x$ என்பது Q-ல் எந்தப் பூச்சியமல்லாத எண்ணாக இருந்தாலும் $\frac{1}{x}$ என்ற எண் Q-ல் உள்ளது. மேலும் $\frac{1}{x} . x = x . \frac{1}{x} = 1$.

(h) கூட்டலும் பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை நிறைவு செய்கின்றன.

(அ - து.) $\forall a, b, c \in Q, \quad a . (b + c) = a . b + a . c$

$$(a + b) . c = a . c + b . c$$

[சுருங்கக் கூறின், Q அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் ஒரு களத்தை அமைக்கிறது.]

**(2)** வரிசை அமைப்பு [**Order Structure**]

Q-ல் உள்ள 0 அல்லாத எண்களைப் பின்வரும் விதிகளுக்கு உட்பட்டிருக்கும்படியாக, $Q^{+}$, $Q^{-1}$ எனும் இரு உள் அடங்கு கணங்களாகப் பிரிக்கலாம்.

(i) $Q^{-1}$ என்பது $Q^{+}$-ல் உள்ள எண்களின் கூட்டல் எதிர் மறைகளால் ஆனது.

(ii) $\forall a, b, c \in Q^{+}, \quad a + b \in Q^{+}, \quad a \; b \in Q^{+}$.

இதிலிருந்து $a, b$ என்பவை Q-ல் எவையேனும் இரு எண்கள் ஆயின்,

'$a$ ஐ விடச் சிறியது $b$' $[a > b]$ எனும் தொடர்பு,

'$a$ ஐ விடச் சிறியது $b$' $\Longleftrightarrow a - b \in Q^{+}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இத் தொடர்பு பின்வருவனவற்றை நிறைவு செய்கிறது

(a) $a, b$ என்பவை Q-ல் எவையேனும் இரு எண்கள் எனின், $a > b$, அல்லது $a = b$, அல்லது $b > a$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று தான் உண்மையாக இருக்கும் [Law of Trichotomy].

(b) $\forall a, b, c \in Q \quad a > b, b > c \Rightarrow a > c$

[கடத்தும் விதி-Law of Transitivity]

(c) $\forall a, b, c \in Q \quad a > b \Longrightarrow a + c > b + c$
[Monotone property of Addition]

(d) $\forall a, b, c \in Q \quad a > b, \; c > 0 \Longrightarrow a . c > b . c$
[Monotone property of Multiplication]

(e) $\forall x, y \in Q \quad x > y \Longrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
$[x \neq 0, \; y \neq 0]$

(f) $x \in Q, \; x > 0$ எனின் $x$ என்பது நேர்விகிதமுறு எண் [Positive rational] என்றும், $0 > x$ எனின் $x$ என்பது எதிர் விகிதமுறு எண் [Negative rational] என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. [Q-ல் உள்ள எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் (Rational numbers) எனப்படும்.]

(g) $x$ என்பது Q-ல் எந்த எண்ணாக இருந்தாலும் $x > 0$ அல்லது $x = 0$ அல்லது $-x > 0$ என்பவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று தான் உண்மையாக இருக்கும்.

(h) $0 > x, 0 > y \; [x, y \in Q]$ எனின் $0 > x + y$,
$x . y > 0$ ஆகும்.

(i) $x > y \; [x, y \in Q]$ எனின் $-y > -x$ ஆகும்.

(j) $\forall x, y, z \in Q, \; x > y. \; 0 > z \Longrightarrow yz > xz$

(k) $a, b \in Z, a > y$ அல்லது $a = y$-இவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று உண்மையாக இருந்தால் அதனை $a > y$ என்று குறிக்கிறோம்.

(l) $<$ எனும் தொடர்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.
$x < y \Longleftrightarrow y > x \; [\forall x, y \in Q]$

(3) தனிப் பெறுமானம் [Absolute Value]

$\forall x \in Q \quad |x|$ என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$x > 0$ அல்லது $x = 0$ எனின் $|x| = x$
$0 > x$ எனின் $|x| = -x$.

$|x|$ என்பது $x$-ன் தனிப் பெறுமானம் (Absolute Value எனப்படுகிறது.

(i) $x \neq 0$ எனின் $|x| > 0$ $[x \in Q]$

(ii) $|x| = |-x|$ $[x \in Q]$

(iii) $\forall x \in Q, \quad |x| \geqslant x, \quad x \geqslant -|x|$

(iv) $\forall x, y \in Q$ $[y>0]$ $y > |x| \iff y>x, x>-y$

(v) $|x| + |y| \geqslant |x+y|$ $[x, y \in Q]$, $|x-y| \geqslant \big|\, |x| - |y| \,\big|$

(vi) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ $[x, y \in Q]$

(vii) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ $[y \neq 0]$

(4) விகித முறு எண் களத்தில் நேர் விகித முறு எண்களால் ஆன கணம் நன்கு வரிசைப்பட்ட கணமல்ல [not well-ordered]

(5) எந்த இரு வேறுபட்ட விகித முறு எண்களுக்கு இடையேயும் மற்றொரு விகிதமுறு எண் உண்டு.

நிரூபணம்: $x, y \in Q$, $x \neq y$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ $x>y$ அல்லது $y>x$-இவற்றுள் ஒன்று உண்மையாக இருக்க வேண்டும் [$y>x$ என்பதை $x<y$ என்றும் எழுதலாம்.]

$y>x$ எனக் கொள்வோம். [$x>y$ என்றாலும் இதேபோன்று நிரூபிக்கலாம்.]

$\therefore$ $x<y$ ஆகும்.

$x, y \in Q$ ஆதலால், $x+y \in Q$, $\frac{1}{2} \in Q$. $\therefore \frac{1}{2}(x+y) \in Q$ ...... (1)

$x < y \Longrightarrow x+x < x+y$

$\therefore$ $2x < x+y \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot (2x) < \frac{1}{2}(x+y)$

$\therefore$ $x < \frac{1}{2}(x+y)$ ...... (2)

$x < y \Longrightarrow x+y < 2y \Longrightarrow \frac{1}{2}(x+y) < \frac{1}{2} \cdot 2y$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(x+y) < y$ ...... (3)

(1), (2), (3)-லிருந்து $\frac{1}{2}(x+y) \in Q$, $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$ என எழுதலாம். ஆகையால் எந்த இரு வேறுபட்ட விகிதமுறு எண் களுக்கிடையேயும் மற்றொரு விகிதமுறு எண் உள்ளது.

குறிப்பு : $x' = \frac{1}{2}(x+y)$ எனின் $x < x'$ ஆதலால், $x$, $x'$ என்பவற் றிற்கிடையே மற்றொரு விகிதமுறு எண் உள்ளது. இவ்வாறு, $x$, $y$ ஆகியவற்றிற்கிடையே முடிவிலா எண்ணிக்கையுள்ள விகிதமுறு எண்கள் உள்ளன.

### 6. ஆர்கிமீடியன் பண்பு (Archemedian property)

$a$, $b$ என்பவை எவையேனும் இரு நேர் விகிதமுறு எண்களாயின்

$\exists\, n \in N \,/\, na > b$.

நிரூபணம் : $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$ என்க. $[p_1, p_2, q_1, q_2 \in N]$

$\therefore p_1 \geq 1, \quad q_2 \geq 1 \quad \therefore 2\, p_1\, q_2 > 1$

$\therefore (p_2\, q_1)(2p_1\, q_2) > p_2\, q_1$

(அ-து.) $(2\, p_2\, q_1)\ (p_1\, q_2) > p_2\, q_1$

$\therefore (2\, p_2\, q_1) \left[\frac{p_1}{q_1}\right] > \frac{p_2}{q_2}$

$\therefore (2\, p_2\, q_1)\, a > b.$

$\therefore \exists\ 2\, p_2\, q_1 \in N \,/\, (2\, p_2\, q_1)\, a > b.$

### (7) தசம பின்னமாக விகிதமுறு எண்களை எழுதுதல் (Decimal representation)

$\frac{65}{8}$ ஐ எடுத்துக் கொள்வோம். வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கை, 65, 8 ஆகிய எண்களுக்குப் பயன்படுத்த $65 = 8 \times 8 + 1$ ஆகும். மீதி 1 ஐ 10 ஆல் பெருக்கி, பிறகு அதனை 8 ஆல் வகுக்க, $10 = 1 \times 8 + 2$ என்று கிடைக்கும். மீண்டும், மீதியை 10 ஆல் பெருக்கி 8 ஆல் வகுக்க, $20 = 2 \times 8 + 4$. மீண்டும், மீதி 4 ஐ 10 ஆல் பெருக்கி 8 ஆல் வகுக்க $40 = 5 \times 8 + 0$.

முதலில் கிடைக்கும் ஈவு 8, $\left(\frac{65}{8}\right.$ ஐத் தசம பின்னமாக எழுதும் பொழுது), முழு எண் பாகம் என்றும் (Integral part), பிறகு ஒவ்வொரு தடவையும் 10 ஆல் பெருக்கி வகுக்கும் எண் 8 ஆல் வகுக்கும்போது கிடைக்கும் ஈவுகள், முதல், இரண்டாவது, மூன்றுவது, நான்காவது......தசம இடங்களில் உள்ள இலக்கங்கள் என்றும் கூறுகிறோம். இதனை $\frac{65}{8} = 8 \cdot 125$ என்று எழுதுகிறோம். இதுவே விகிதமுறு எண்களைத் தசம பின்னமாகக் குறியீடு செய்யும் முறையாகும்.

சிலநேரங்களில், மீதியை 10 ஆல் பெருக்கி, வகுக்கும் எண்ணுல் வகுப்பதைப் பல தடவை செய்தாலும் மீதி 0 என்ற நிலை வராது. அது மட்டுமன்றி தசம இடங்களில் உள்ள எண்கள் ஒரு கால வட்ட ஒழுங்குடையனவாக (Periodic) இருக்கும். இதனை மடங்குத் தசமம் (Recurring decimal) என்று கூறுகிறோம்.

(எ - கா:) $\frac{2}{7} = 0 \cdot 28571428571 \ldots \ldots \ldots$

1. தேற்றம்: ஒவ்வொரு விகிதமுறு எண்ணையும் முடியும் தசமமாகவோ (Terminating decimal), அல்லது முடிவில் மடங்கு தசமமாகவோ (Infinite recurring decimal) எழுத முடியும்.

நிரூபணம்: $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ என்ற விகிதமுறு எண்ணை எடுத்துக் கொள்வோம். $[a, b, \in Z]$. பொதுத் தன்மைக்குப் பங்கம் ஏற்படாதவாறு, (Without loss of generality) $\frac{a}{b}$ ஒரு நேர் விகிதமுறு எண் எனக் கொள்வோம்.

$a, b$-க்கு வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்த,

$$a = q_0 b + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b, \quad q_0, r_0 \in \mathrm{Z}.$$

$q_0$ என்பது $\frac{a}{b}$-ன் தசமக் குறியீட்டில் (Decimal representation) முழு எண் பகுதியாகும்.

$r_0 = 0$ எனின், $\frac{a}{b} = q_0 \in \mathrm{Z}$. ஆகையால் $\frac{a}{b}$ ஒரு முழு எண் ஆகும்.

ஆகையால், மேற்கொண்டு செல்லத் தேவையில்லை.

$r_0 \neq 0$ என்போம். $10\, r_0 \in Z$.

$10\, r_0$, $b$-இவற்றிற்கு வகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன் படுத்த,

$$10\, r_0 = q_1\, b + r_1 \quad 0 \leq r_1 < b \quad [q_1, r_1 \in Z]$$

$$r_0 < b \Longrightarrow 10\, r_0 < 10\, b \Longrightarrow q_1 b + r_1 < 10\, b$$

$$\Longrightarrow q_1\, b < q_1\, b + r_1 < 10\, b$$

$$\Longrightarrow q_1\, b < 10\, b$$

$$\Longrightarrow q_1 < 10 \quad [\because b \neq 0]$$

மேலும், $b, r_0$ ஆகியவை நேர் முழு எண்கள் ஆதலாலும், $r_1 > 0$ ஆதலாலும், $q_1 > 0$ ஆகும்.

$q_1$ ஐ $\frac{a}{b}$-ன் தசமக் குறியீட்டில் முழு இலக்கத்திற்குப் பிறகு தசமப் புள்ளி வைத்து அதற்கு அடுத்த இலக்கமாக எழுதுகிறோம்.

$r_1 = 0$ எனின் $10\, r_0 = q_1\, b$

$$\therefore a = q_0\, b + r_0 = q_0\, b + \frac{q_1\, b}{10}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10}$$

$$= q_0 \cdot q_1$$

$r_1 \neq 0$ எனின் மேற்கூறிய முறையைத் திரும்பவும் பயன் படுத்தி,

$$10\, r_1 = q_2\, b + r_2 \quad (q_2, r_2 \in Z)\ ,\ 0 \leq r_2 < b\ ,\ 0 \leq q_2 < 10$$

$\therefore \frac{a}{b}$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாகும்.

$\therefore q_0 \cdot q_1\, q_2 \ldots\ldots q_n$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும்.

**வகை ii.** $q_0 \cdot q_1\, q_2 \ldots\ldots q_k\, q_{k+1} \ldots\ldots q_n\, q_k \ldots\ldots q_n \ldots\ldots$ என்ற ஒரு முடிவில் மடங்கு தசமத்தை எடுத்துக் கொள்வோம் (Infinite recurring decimal).

$q_0 \cdot q_1 q_2 \cdots\cdots q_k q_{k+1} \cdots\cdots q_n q_k \cdots\cdots q_n \cdots\cdots$

$$= q_0 \cdot q_1 \cdots\cdots q_{k+1} + \left\{ \frac{1}{10^k} (q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n) + \frac{1}{10^{n+1}} [q_k \cdot q_{k+1} \cdots q_n] + \cdots \right\}$$

$= A + B$ என்க.

$A = q_0 \cdot q_1 \cdots\cdots q_{k-1}$ என்பது ஒரு முடியும் தசமம் ஆதலால் வகை (1)-ன்படி அது ஒரு விகித முறு எண்ணைக் குறிக்கும்.

$\cdots\cdots$ (1)

$$B = \frac{1}{10^k} \left\{ q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n + \frac{1}{10^{n+1-k}} (q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n) + \cdots\cdots \right\}$$

$$= \frac{q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n}{10^k} \left\{ 1 + \frac{1}{10^{n+1-k}} + \frac{1}{10^{2n+2-2k}} + \cdots\cdots \right\}$$

$$= \frac{q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n}{10^k} \left[ \frac{1}{1 - 10^{-n-1+k}} \right]$$

$$= \frac{q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n}{10^k [1 - 10^{k-n-1}]}$$

இது ஒரு விகித முறு எண்ணாகும். [$\because q_k \cdot q_{k+1} \cdots\cdots q_n \in Q$, $10^k [1 - 10^{k-n-1}] \in Q$] $\cdots\cdots$ (2)

(1), (2) ஆகியவற்றிலிருந்து கொடுத்த முடிவில் மடங்கு தசமம் ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும் எனத் தெரிகிறது.

எ. கா. : 2·1231231231 ...... என்பதை விகிதமுறு எண்ணாகக் கூறுக.

$2 \cdot 1231231231 \cdots\cdots = 2 + \cdot 123 + \cdot 000123 + \cdot 000000123 + \cdots\cdots$

$$= 2 + (\cdot 123) \left\{ 1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \cdots\cdots \right\}$$

என்று நிரூபிக்கலாம். மேலும் $r_2 = 0$ எனின்,

$$a = q_0 b + \frac{q_1 b}{10} + \frac{q_2 b}{100} \text{ (அ-து.) } \frac{a}{b} = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100}$$

(அ-து.) $\frac{a}{b} = q_0 \cdot q_1 q_2$

$r_2 \neq 0$ எனின் மேற்கூறிய முறையை மீண்டும் பயன்படுத்துக. இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்வதாகக் கொள்வோம். இரு நிலைகள் ஏற்படும்.

(i) ஏதாவது ஒரு நிலையில் மீதி $r_n$ பூச்சியமாகும்.

இந்நிலையில் $\frac{a}{b} = q_0 \cdot q_1 q_2 \ldots\ldots q_n$ என எழுதலாம். இது ஒரு முடியும் தசமமாகும்.

(ii) எந்த மீதியும் பூச்சியமாக இல்லை என்ற நிலை ஏற்படுவதாகக்கொள்வோம். மீதிகள் $b$ ஐ விடக் குறைந்தனவாகவும், $0$ ஐ விடப் பெரியனவாகவும் உள்ளதால், எவையேனும் இரு மீதிகள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

$r_{n-1} = r_n$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \; 10 r_{n-1} = q_n b + r_n$

$r_n = r_{n-1}$ ஆதலால், $10 r_n$, $b$-க்குவகுத்தல் இலக்கணக் கணக்கைப் பயன்படுத்தலால் மீண்டும் ஈவு $q_n$ என்றும், மீதி $r_n$ என்றும் கிடைக்கும். ஆகையால் பின்னர் வரும் ஈவுகள் எல்லாம் $q_n$ ஆகவும், மீதிகளெல்லாம் $r_n$ ஆகவும் இருக்கும்.

$\therefore \; \frac{a}{b} = q_0 \cdot q_1 q_2 \ldots\ldots q_{n-1} q_n q_n \ldots\ldots$ என்று கிடைக்கும்.

$r_{k-1} = r_n \; (k < n)$ என்றால் $\frac{a}{b} = q_0 \cdot q_1 q_2 \ldots\ldots q_k \ldots\ldots q_n q_k \ldots\ldots q_n \ldots\ldots$ என்று நிறுவலாம். இரண்டு நிலைகளிலும் $\frac{a}{b}$ -ன் தசமக் குறியீடு ஒரு முடிவில் மடங்குத் தசமமாக (Infinite recurring decimal) உள்ளது.

(ii) தேற்றம் : எந்த ஒரு தசம பின்னமும், முடியும் தசமமாகவோ அல்லது முடிவில் மடங்குத் தசமமாகவோ இருந்தால் அது ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறிக்கும்.

நிரூபணம் : வகை 1. ஒரு முடியும் தசமத்தை (Terminating decimal) எடுத்துக் கொள்வோம். அது $q_0 \cdot q_1 q_2 \ldots\ldots q_n$ என்று இருக்கட்டும்.

$$q_0 \cdot q_1 q_2 \ldots\ldots q_n = q_0 + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{q_n}{10^n}$$

$$= \frac{10^n q_0 + 10^{n+1} q_1 + \ldots\ldots + q_n}{10^n}$$

$$= \frac{a}{b} \quad [a = 10^n q_0 + 10^{n-1} q_1 + \ldots\ldots + q_n \in Z$$
$$b = 1^n \in Z]$$

$$= 2 + (\cdot 123) \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}} \qquad = 2 + \frac{(\cdot 123) \times 1000}{999}$$

$$2 + \frac{123}{999} = 2 + \frac{41}{333} = \frac{707}{333}$$

$$\therefore \frac{707}{333} = 2 \cdot 1231231 \ldots\ldots\ldots$$

## 8. விகிதமுறு எண்களின் பூர்த்தியில்லாத் தன்மை [Incompleteness of Rational Numbers]

விகிதமுறு எண் களம் ஒரு களமாக இருந்தாலும் எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் அதில் தீர்க்க முடிவதில்லை. உதாரணமாக $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு இக் களத்தில் தீர்வு கிடையாது என நிரூபிப்போம்.

முடிந்தால் $x = p/q$ என்ற விகிதமுறு எண் $[p, q \in Z, q \neq 0]$ $x^2 = 2$ எனும் சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யட்டும்.

$$\therefore \frac{p}{q} \in Q, \qquad \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$p, q$ ஆகியவற்றின் உ. பொ. கா. $d$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ $p = md, q = nd$ என எழுதலாம்: $(m, n \in Z)$.

மேலும் $(m, n) = 1$ ஆகும். [(அ-து.) $m, n$ ஆகியவற்றின் உ. பொ. கா. 1] ... ... (1)

$$2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{m^2 d^2}{n^2 d^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

$\therefore$ $m^2 = 2n^2$ $\therefore$ $m^2$ என்பது இரட்டைப் படை எண்ணாகும்.

$\therefore$ $m$ என்பது ஓர் இரட்டைப் படை எண்.

[ஏனெனில் ஒற்றைப் படை எண்ணின் வர்க்கமும் ஒற்றைப் படையாகும்.]

$\therefore$ $m = 2x$ $(n \in Z)$ என்க.

$\therefore$ $4x^2 = 2n^2$ $\therefore$ $n^2 = 2x^2$

$\therefore$ $n^2$ என்பது இரட்டைப் படை எண். $\therefore$ $n$ ஓர் இரட்டைப் படை எண்ணாகும். $\therefore$ $m, n$ ஆகியவற்றிற்கு 2 பொதுக் காரணியாக உள்ளது. இது (1)-க்கு முரண்பாடாகும். ஆகையால் $p/q \in Q$, $p^2/q^2 = 2$ என்று கொண்டது தவறு. ஆகையால் $x^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டை எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் நிறைவு செய்யாது.

ஆகையால், இரு விகிதமுறு எண்களுக்கிடையே அந்தமில் விகிதமுறு எண்கள் இருந்தாலும் எளிய சமன்பாடுகளான $x^2 = 2$ போன்றவற்றை நிறைவு செய்யும் எண்கள் Q-ல் இல்லை. இதனால் விகிதமுறு எண் களத்தில் இடைவெளிகள் [Gaps] உள்ளன என்கிறோம். இந்த இடைவெளிகளை அடைக்கும் வழியை டெடிகிண்ட் [Dedekind] என்பவர் கண்டார். இதனால் மெய்யெண் களம் பிறந்தது.

## 2. மெய்யெண் களம் [Real Number Field]

விகிதமுறு எண் களத்தில் இடைவெளிகள் இருக்கின்றன என்றும், அவை முற்றுப்பெற்றனவாகஇல்லைஎன்றும்அறிந்திருக்கிறோம். கிரேக்கர்கள் மெய்யெண்களை வரைமுறை [Geometry] வழியில் அறிய முயற்சித்தார்கள். ஒரு சதுரத்தின் பக்கம் ஓர் அலகு ஆனால் மூலை விட்டத்தின் நீளம் $d$ என்பது $d^2 = 2$ என்ற சமன்பாட்டைப் பூர்த்தி செய்யும். ஆனால் $d$ ஒரு விகிதமுறு எண்ணாக இருக்க முடியாது. இது பிதகோரசுக்கு ஒரு புதிராக இருந்தது.

இப் புதிரை விடுவிக்கும் வழி, புதிய பல எண்களை விகிதமுறு எண் களத்தோடு சேர்ப்பதேயாகும். இப்புதிய எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் (Irrational numbers) எனப்பட்டன.

மேலும் விகிதமுறு எண்களை ஒரு நேர்க்கோட்டில் அமைந்த புள்ளிகள் மூலம் குறியீடு செய்வதாக வைத்துக்கொள்வோம். அந்த நேர்க்கோட்டை எந்த முறையில் இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தாலும், அவை ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறியீடு செய்யும் புள்ளியைப் பொது எல்லைப் புள்ளியாகக் கொண்டிருக்கவேண்டும் என்ற தேவையில்லை. [ஏனெனில்

L = { எதிர் விகிதமுறு எண்கள், 0, நேர் விகிதமுறு எண்கள் $x \mid x^2 < 2$ }

R = { எஞ்சிய விகிதமுறு எண்கள் } என்ற முறையில் இரு பகுதிகளாகப் பிரித்தால் இவை ஒரு விகிதமுறு எண்ணைக் குறியீடு செய்யும் புள்ளியைப் பொது எல்லையாகக் கொண்டிரா.] ஆதலால் விகிதமுறு எண்களில் தொடர்ச்சி (Continuity) இல்லை.

தொடர்ச்சியுள்ள ஒரு களத்தை அமைப்பது பற்றிய ஆராய்ச்சி குறிப்பாக 19ஆம் நூற்றாண்டின் பிற்பகுதியில்தான், தீவிரமாகச் செய்யப்பட்டது. கான்டார் [Cantor (1845—1918)], டெடிகிண்ட் [Dedekind (1831–1896)] ஆகிய இருவரும் இரு வழிகளைக் கண்டனர். இங்கு டெடிகிண்ட கண்ட வழியைப் பார்ப்போம்.

2·1. வரையறை : டெடிகிண்ட் வெட்டு (Dedekind's cut)

விகித முறு எண் களம் Q-ன் ஓர் உள் அடங்கு கணம் A, பின் வரும் விதிகளை நிறைவு செய்தால், நிறைவு செய்தால் மட்டுமே அது ஒரு டெடிகிண்ட் வெட்டு அல்லது வெட்டு [Dedekind cut or cut] எனப்படுகிறது.

(i) A வெறுமையற்ற கணமாகும். மேலும் $A \neq Q$.

(ii) $\forall\ a \in A,\ b \in Q,\ b < a$ எனின் $b \in A$.

(iii) $a \in A$ என்றால் $\exists\ c \in A \mid c > a$.

எ. கா. 1. $A = \{a \mid a \in Q,\ a < b\}$ என்பது ஒரு வெட்டு ஆகும். பொதுவாக $\{a \mid a \in Q\ a < r,\ r \in Q\}$ என்ற வெட்டு $C_r$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு 1: $p \in Q,\ p \notin C_r$ எனின் $p > r$ ஆகும்.

$\therefore\ C_r' = \{p \mid p \in Q,\ p > r\}$ என்ற கணம் $C_r$-ல் இல்லாத எல்லா விகிதமுறு எண்களையும் கொண்ட கணமாகும். மேலும், $C_r'$-ல் $r$ என்பது மிகக் குறைந்த எண்ணாகும்.

எ.கா. 2 : $A = \{$ எதிர் விகிதமுறு எண்கள், 0, நேர் விகித முறு எண்கள் $x/x^2 < 2\}$ என்ற கணம் ஒரு வெட்டு ஆகும். இங்கு $A' = \{x \mid x \in Q, x>0, x^2<2\}$.

[$x^2=2$ என்ற வகையில் விகிதமுறு எண் $x$ கிடையாது.]

மேலும் $A'$-ல் மிகக் குறைந்த எண் கிடையாது என நிரூபிக்கலாம்.

குறிப்பு 2 : A என்பது ஒரு வெட்டு ஆகவும், $r$ ஒரு நேர் விகிதமுறு எண் ஆகவும் இருந்தால் $\exists\, a \in A \mid a+r \in A'$ என்று நிரூபிக்கலாம்.

**2·2.** வெட்டுகளின் கூட்டல்: எல்லா வெட்டுகளையும் கொண்ட கணத்தை R என்று குறிப்போம். $\forall\, A, B \in R$, $A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. A+B ஒரு வெட்டு என்று நிரூபிக்கலாம். ∴ $A+B \in R$. குறிப்பாக $C_r+C_s = C_{r+s}$ ஆகும்.

கூட்டல், சேர்ப்பு (Associative), பரிமாற்று (Commutative) விதிகளை நிறைவு செய்கிறது என நிரூபிக்கலாம்.

$C_0$ என்பது K-ல் கூட்டல் அலகாகும் (Additive identity)

**2·3.** வெட்டுகளின் கூட்டல் எதிர்மறை [Additive inverse of a cut]

A என்பது யாதேனும் ஒரு வெட்டு என்க.

$-A=\{x \mid x \in Q$, $x$ என்பது $A'$-ல் உள்ள யாதேனும் ஓர் உறுப்பின் கூட்டல் எதிர்மறையை விடக் குறைவு. (அ-து.) $x<-a'$, $a' \in A\}$.

$-A$ என்பது ஒரு வெட்டு என்றும் $A+(-A)=(-A)+A = C_0$ என்றும் நிரூபிக்கலாம்.

**2·4.** $R^+$ஐ வரையறுத்தல்: $R^+=\{A \mid A \in R$, A சில நேர் விகித முறு எண்களையாவது கொண்டது $\}$

$R^+ \subset R$. மேலும் $R^+$ என்பது R-ல் உள்ள நேர் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் (Positive elements) எனப்படுகிறது. [குறிப்பு: $A \in R$, A சில நேர்விகிதமுறு எண்களைக் கொண்டிருந்தால் A என்பது R-ல் நேர் உறுப்பு எனப்படுகிறது.]

மேலும் $A \in R$ எனின் $A \in R^+$ அல்லது $A = C_0$ அல்லது $-A \in R^+$-இவற்றுள் ஒன்றே ஒன்று தான் உண்மையாக இருக்கும்.

$A \in R^+$ எனின் $A > C_0$ என்றும் $-A \in R^+$ எனின் $A < C_0$ என்றும் கூறுகிறோம்.

$\forall A, B \in R,\ A > B \iff A - B > C_0$ என்ற முறையில் '$A > B$' வரையறுக்கப்படுகிறது.

$A \in R, \quad A > C_0 \Longrightarrow |A| = A$

$A < C_0 \Longrightarrow |A| = -A$ என்ற வகையில்

$|A|$ வரையறுக்கப்படுகிறது.

$\forall A \in R^+$, $A_p$ என்ற கணம் பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

$A_p = \{x \mid x \in A, x > 0\}$ $A_p$ என்பது வெறுமையற்ற கண மாகும். மேலும் $A_p$ தெரிந்தால் $A = A_p \cup \{0\} \cup \{Q^-\}$

## 2·5. இரு வெட்டுகளின் பெருக்கல் (Multiplication of two cuts)

$\forall A, B \in R$, $A \cdot B$ என்பது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படு கிறது.

(i) $A > C_0,\ B > C_0$ எனின் $(AB)_p = \{ab \mid a \in A_p, b \in B_p\}$

$\therefore\ AB = (AB)_p \cup \{0\} \cup \{Q^-\}$

(ii) $A > C_0,\ B < C_0$ அல்லது $A < C_0,\ B > C_0$ எனின் $AB = -[\,|A| \cdot |B|\,]$

(iii) $A < C_0,\ B < C_0$ எனின் $AB = (\,|A| \cdot |B|\,)$

(iv) $A = C_0$ அல்லது $B = C_0$ அல்லது $A = B = C_0$ எனின் $AB = C_0$ ஆகும்.

$AB$ என்பது ஒரு வெட்டு என்று நிரூபிக்கலாம். $\therefore AB \in R$.

பெருக்கல், சேர்ப்பு (Associative), பரிமாற்று விதிகளை (Commutative) நிறைவு செய்கிறது என நிரூபிக்கலாம்.

மேலும் $C_1$ என்பது R-ல் பெருக்கல் அலகாகும் (Multiplicative identity).

$A \neq C_0$, $A \in R$ எனின் $B = \left\{ x \,/\, x \in Q,\ x \right.$ என்பது A' -ல் உள்ள யாதேனும் ஒரு பூச்சியமல்லாத உறுப்பின் பெருக்கல் எதிர்மறையை விடக் குறைவு. (அ-து.) $\exists\ a' \in A',\ \left. a' \neq 0 \mid x < \frac{1}{a'} \right\}$

கணம் B ஒரு வெட்டு என்றும் $AB = BA = C_1$ என்றும் நிரூபிக்கலாம். ஆகையால் B என்பது A-ன் பெருக்கல் எதிர்மறையாகும்.

மேற்கூறியவைகளிலிருந்து R ஒரு வரிசைப்பட்ட களம் (Ordered Field) எனத் தெரிகிறது. மேலும் $R' = \{c_r \mid c_r \in R, r \in Q\}$ என்ற கணம் R-ன் உள் அடங்கு கணமாகும்.

$\alpha : r \in Q \longrightarrow C_r \in R'$ என்பது Q-விருந்து R-க்கு ஒரு முழு ஓரினச் சார்பு (On to Isomorphism) என நிறுவலாம்.

களம் R, மெய்யெண் களம் (Real field) என அழைக்கப்படுகிறது. அதன் உறுப்புகள் மெய்யெண்கள் எனப்படுகின்றன. $C_r$ என்பது விகிதமுறு எண் (Rational number) என்றும், $C_r$ என்றவாறு கூறமுடியாத எந்த ஒரு வெட்டும் ஒரு விகிதமுரு எண் (Irrational number) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

## 2·6. மெய்யெண் களத்தின் அமைப்பு (Structure of Real Number Field)

### (1) இயல்முறைக் கணித அமைப்பு (Algebraic Structure)

மெய்யெண் களத்தை R என்று குறிப்போம். R-ல் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின்கீழ் R ஒரு களத்தை (Field) அமைக்கிறது.

### (2) வரிசை அமைப்பு (Order Structure)

R ஒரு வரிசைப்பட்ட களமாகும்.

(3) எந்த இரு மெய்யெண்களுக்கிடையேயும் மற்றொரு மெய்யெண் உண்டு. ஆகையால் எந்த இரு மெய்யெண்களுக்கிடையேயும் அந்தமில் மெய்யெண்கள் பல உண்டு.

(4) ஆர்க்கிமிடியன் பண்பு $\forall$ A, B $\in R^+$, $\exists\, n \in N \mid nA > B$.

(5) மேல் எல்லை (Upper bound)

S என்பது களம் R–ன் ஓர் உள் அடங்கு கணமாக இருக்கட்டும். $\forall x \in S$, $x \leq b$ என்ற முறையில் $b$ என்ற உறுப்பு R-ல் உளதாயின் [$b$ என்ற உறுப்பு S–ல் இருக்கலாம் அல்லது இல்லாமலும் இருக்கலாம்] $b$, கணம் S–ன் R-ல் உள்ள மேல் எல்லை (Upper bound) எனப்படுகிறது.

மிகச் சிறிய மேல் எல்லை [A least upper bound)

$b$ என்பது S-ன் R-ல் உள்ள ஒரு மேல் எல்லையாக இருந்து $b$ ஐ விடக் குறைவான R–ல் உள்ள எந்த் உறுப்பும் S-க்கு மேல் எல்லையாக இருக்க முடியாது என்றால் $b$, கணம் S-ன், R-ல் உள்ள ஒரு மிகச்சிறிய மேல் எல்லை என வரையறுக்கப்படுகிறது.

R–ன் எந்த ஒரு வெறுமையற்ற உள் அடங்கு கணம் S-ம், R–ல் ஒரு மேல் எல்லையை உடையதாய் இருந்தால் S-க்கு R-ல் ஒரு மிகச் சிறிய மேல் எல்லை உண்டு.

[குறிப்பு: மேற்கூறிய மேல் எல்லை முதலியவற்றின் வரையறை எந்த வரிசைப்பட்ட களத்திற்கும் பொருந்தும்.]

(6) களம் R-ல் விகிதமுறு எண் களம் Q-ல் உள்ளதுபோல் இடைவெளிகள் (Gaps) கிடையாது.

மெய்யெண்களின் தொகுதியை எண் கணிதத் தொடரகம் (Arithmetical Continuum) என்றும், மெய்யெண்களைக் குறியீடு செய்யும் புள்ளிகளைக் கொண்ட நேர்க்கோட்டை நீட்டலுக்குரிய தொடரகம் [Linear (Geometric) Continuum] என்றும் கூறுவர்.

3. சிக்கல் எண் களம் [Complex Number Field]

மெய்யெண் களத்தில் மெய்யெண் குணகங்களைப்பெற்ற எல்லாச் சமன்பாடுகளையும் மெய்யெண் களத்தில் தீர்க்க முடியாது. எடுத்துக்காட்டாக $x^2 + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டை எந்த ஒரு மெய்

யெண்ணும் நிறைவு செய்ய முடியாது. ஆகையால் இச் சமன்பாடு களின் தீர்வுகளைச் சேர்த்து ஒரு களம் அமைப்பது அவசியமாகிறது. இவ்வகையில் வந்ததே சிக்கல் எண் களமாகும். [Complex Number Field].

**3·1.** தேற்றம்: R என்பது மெய்யெண் களத்தைக் குறிக்கட்டும்.

$C = \{$ வரிசையிட்ட ஜோடி $(a, b) \mid a, b \in R\}$ என்று கணம் C அமைக்கப்படுகிறது. கூட்டலும் பெருக்கலும் C-ல் பின் வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$\forall \quad (a, b), (c, d) \in C, \quad (a, b) \oplus (c, d) = (a+c, b+d)$$
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

இக் கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் C ஒரு களமாகும்.

நிரூபணம் : கூட்டலின்கீழ் C அடைப்புள்ளது என்பது தெளிவு. மேலும் கூட்டல், சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்கிறது என எளிதாக நிரூபிக்கலாம். $(0, 0)$ என்பது C-ன் கூட்டல் அலகாகும். [$0$ என்பது R-ன் கூட்டல் அலகைக் குறிக்கும். $(-a, -b)$ என்பது C-ன் கூட்டல் எதிர்மறை ஆகும். [$-a$ என்பது R-ல் $a$-ன் கூட்டல் எதிர்மறையாகும்.]

மேலும் பெருக்கல் சேர்ப்பு, பரிமாற்று விதிகளை நிறைவு செய்கிறது என நிரூபிக்கலாம். $(1, 0)$ என்பது C-ல் பெருக்கல் அலகு ஆகும்.

$(a, b)$ என்பது C-ல் கூட்டல் அலகு அல்லாத உறுப்பாக இருந்தால்,

[(அ-து) $a \neq 0$, $b \neq 0$], $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ என்ற C-ல் உள்ள உறுப்பு $(a, b)$-ன் பெருக்கல் எதிர் மறையாகும்.

மேலும் கூட்டலும், பெருக்கலும் பங்கீட்டு விதிகளை (Distributive laws) நிறைவு செய்கின்றன என்று நிரூபிக்கலாம்.

மேற்கூறியவைகளிலிருந்து C அதில் வரையறுக்கப்பட்ட கூட்டல், பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் ஒரு களமாகும் எனத் தெரிகிறது.

குறிப்பு 1: $C' = \{(a, 0) \mid a \in R\}$ என்பது C-ன் உள் அடங்கு கணமாகும்.

C′ கூட்டல் பெருக்கல் ஆகிய செயல்களின் கீழ் அடைப்புள்ளது என நிரூபிக்கலாம். மேலும் $\alpha : a \in R \longrightarrow (a, 0) \in C'$ என்பது R-லிருந்து C′-க்கு ஒரு முழு ஓரினச்சார்பு (on to isomorphism) ஆகும். R ஒரு களமாதலால் C′-ம், ஒரு களமாகும்.

குறிப்பு 2: C என்பது சிக்கல் எண் களம் (Complex number field) என்றும் C-ல் உள்ள உறுப்புகள் சிக்கல் எண்கள் (Complex numbers) என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

குறிப்பு 3: $(0, 1)$ என்ற C-ல் உள்ள உறுப்பு $i$ என்று குறிக்கப்படுகிறது.

$(0, 1) \otimes (0, 1) = (-1, 0)$ (அ-து.) $i^2 = (-1, 0)$

$(a, 0)$ ஐ $a$ என்றே குறித்தால் $i^2 = -1$ ஆகும்.

மேலும் $\forall (a, b) \in C$, $(a, b) = (a, 0) \oplus (b, 0) \oplus (0, 1)$

அதாவது $(a, b)$ ஐ $a + bi$ என்று குறிக்கலாம்.

3·2. சிக்கல் எண் களத்தின் அமைப்பு [Structure of Complex Number Field].

1. இயல் முறைக் கணித அமைப்பு (Algebraic Structure) சிக்கல் எண்களால் ஆன கணம் C, ஒரு களமாகும்.

2. இக் களம் வரிசைப்பட்ட களமல்ல.

3. சிக்கல் எண் குணகங்களையும், நேர் முழு எண் படிகளையும் கொண்ட எந்த ஒரு சமன்பாடும் சிக்கல் எண் களத்தின் ஒரு தீர்வு பெற்றுள்ளது. இதுவே இயல் முறைக் கணிதத்தின் அடிப்படைத் தேற்றமாகும் (Fundamental theorem of Algebra). இப் பண்பைப் பெற்ற சிக்கல் எண் களம் இயல் முறை கணித அடைப்புள்ளது (Algebraically closed) என்கிறோம்.

## பயிற்சி

(1) ஒவ்வொரு களமும் ஓர் எண் அரங்கம் என நிரூபிக்க.

(2) $n$ ஒரு பகா எண்ணாக இல்லாவிடில் $(Z_n, +, \cdot)$ ஒரு களத்தை அமைக்குமா?

(3) i. $Q(\sqrt[3]{5}) = \{a + b\sqrt[3]{5} + C\sqrt[3]{25} \mid a, b, c \in Q\}$ என்ற கணம் ஒரு களத்தை அமைக்குமா?

ii. $S = \{a + b\sqrt[3]{7} \mid a, b \in Q\}$ என்ற கணம் ஒரு களமாகுமா?

(4) சிக்கல் எண் களத்தின் அமைந்த $2 \times 2$ அணிகளைக் கொண்டு, சில களங்களை அமைக்கவும்.

(5) பின்வரும் களங்களில் பூச்சியமல்லாத உறுப்புகளுக்குப் பெருக்கல் எதிர்மறைகளைக் காணவும்.

(i) $(Z_3, +, .)$ (ii) $(Z_5, +, .)$ (iii) $(Z_7, +, .)$ (iv) $(Z_{11}, +, .)$ (v) $(Z_{13}, +, .)$ (vi) $(Z_{17}, +, .)$ (vii) $Z_{19}, +, .)$

மேலும் மேற்கூறிய களங்களில் பெருக்கல், கூட்டல் அட்டவணைகளை எழுதவும்.

(6) $S = \{a, b, c, d\}$ என்பது ஒரு கணமாகும். அதில் கூட்டல் அட்டவணையும், பெருக்கல் அட்டவணையும் பின்வருமாறு உள்ளது.

| (+) | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | a | b |
| d | d | c | b | a |

| (.) | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a |
| b | a | b | c | d |
| c | a | c | d | b |
| d | a | d | b | c |

S என்பது ஒரு களத்தை அமைக்குமா? அவ்வாறு அமைத்தால் கூட்டல் அலகு, பெருக்கல் அலகு, பூச்சியமல்லாத [கூட்டல் அலகு அல்லாத] உறுப்புகளின் எதிர்மறை ஆகியவற்றைக் காண்க.

(7) ஒரு களம் F-ல் பின் வருவனவற்றை நிரூபிக்க.

i) $b \neq 0$, $d \neq 0$, $b, d \in F$, $(b\,d)^{-1} = d^{-1}b^{-1}$

ii) $(-b)^{-1} = -(b^{-1})$

iii) $a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$, $a\left(\frac{b}{c}\right) = 2$, $[c \neq 0, a, 0.]$

(iv) $\frac{a}{b} \Big/ c = \frac{a}{bc}$, $\frac{a}{e} = a$ $[b, c \neq 0, \quad b, c \in F]$

(v) $-\left(\frac{a}{b}\right) = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$ $[b \neq 0, \quad b \in F]$

$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ [ ,, ]

(vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ $[a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad a, b \in F]$

(vii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$ $[b \neq 0, \quad b \in F]$

(viii) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ $[a, b, c, d \in F,$
$b \neq 0, d \neq 0]$

(8) ஒரு வரிசைப்பட்ட களத்தின் எந்த ஓர் உள் அடங்கு களமும் வரிசைப்பட்டது என நிறுவுக. ஒரு வரிசைப்பட்ட களத்தின் எந்த ஓர் உள் அடங்கு எண் அரங்கமும் வரிசைப்பட்ட எண் அரங்கமாய் இருக்குமா ?

(9) எந்த ஒரு வரிசைப்பட்ட களத்திலும் நேர் உறுப்புகளைக் கொண்ட கணம் நன்கு வரிசைப்பட்டதல்ல என நிறுவுக.

(10) ஒரு களம் F-ல் $a, b, c$ என்பவை எவையேனும் மூன்று உறுப்புகளாகும். $b \neq 0, \quad c \neq 0$. $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b+c}$ $\Longrightarrow a = 0$ அல்லது $b^2 + bc + c^2 = 0$ என நிறுவுக.

(11) $n \in N, \quad a, b \in Q^+$ எனின், $\frac{a^n + b^n}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ என நிறுவுக.

(12) $a, b \in Q, a < b, c, d \in Q^+$ எனின் $a < \frac{ac + bd}{c + d} < b$ என நிறுவுக.

(13) (i) $\frac{37}{13}$, $\frac{2}{7}$ ஆகியவற்றை மடங்குத் தசமங்களாகக் கூறுக

(ii) 7·12121212......, 9·721721,......2·467467,......

4·461717 ... ... ஆகியவற்றை விகிதமுறு எண்களாகக் கூறுக.

(14) $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $e$ ஆகியவை விகிதமுறு எண்கள் அல்ல என நிறுவுக.

(15) A = { எதிர் விகிதமுறு எண்கள், 0, நேர் விகிதமுறு எண்கள் $x/x^2 < 2$ } என்ற கணம் ஒரு வெட்டு என நிறுவுக. A′-ல் மிகச் சிறிய எண் கிடையாது என நிறுவுக.

(16) $d \in N$, $d$ எந்த ஒரு முழு எண்ணின் வர்க்கமும் அல்ல எனின், $d$ எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணின் வர்க்கமும் ஆக இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

(17) $d$ என்பது ஒரு நேர் முழு எண் ஆகும். ஆனால் $d$ என்பது எந்த ஒரு முழு எண்ணின் வர்க்கமும் அல்ல. $x$ என்பது ஒரு நேர் விகிதமுறு எண் ஆகும். $y = x\frac{[x^2+3d]}{3x^2+d}$ என்றால், $y-x = 2x\frac{[d-x^2]}{3x^2+d}$ எனவும் $y^2-d^2 = \frac{(x^2-d)^3}{(3x^2+d)^2}$ எனவும் நிருபிக்க. மேலும்,

A = {எல்லா எதிர் விகிதமுறு எண்கள், 0, நேர் விகிதமுறு எண்கள் $x \mid x^2 < d$} என்ற கணம் ஒரு வெட்டு என நிறுவுக. $A' = \{x \mid x \in Q, x > 0, x^2 > d\}$ என்ற கணத்திற்கு மிகச்சிறிய எண் கிடையாது என நிறுவுக.

(18) $n$ என்பது ஓர் இயற்கை எண்ணாகும். ஆனால் முழு வர்க்கமல்ல. $a, b \in Q+$. மேலும் $b^2 > na^2$.

$l = \frac{na + bk}{b + ak}$ $[K \in Q, K > 0]$ எனின் $l$—K, $l^2 - n$

ஆகியவற்றைக் காண்க. மேலும் A {எல்லா எதிர் விகிதமுறு எண்கள், 0, நேர் விகிதமுறு எண்கள் $x \mid x^2 < n$} என்ற கணம் ஒரு வெட்டு என்றும்,

$A' = \{ x \mid x \in Q, x > 0, x^2 < n \}$ என்ற கணத்தில் மிகச் சிறிய எண் கிடையாது எனவும் நிரூபிக்க.

(19) $Z = (a, b) \in C$, $\overline{Z} = (a, -b)$ எனின் $Z\overline{Z} \in R$, $Z + \overline{Z} \in R$ என நிறுவுக. மேலும் $\forall$ Z, W $\in C$, $\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W}$, $\overline{Z . W}$ $\overline{Z} . \overline{W}$ எனவும் நிரூபிக்க.

(20) $\forall Z \in C$, $\overline{(\overline{Z})} = Z$ எனவும், $Z \neq 0 \Longrightarrow \overline{(Z^{-1})} = (\overline{Z})^{-1}$ எனவும், $Z \in C$, $Z = \overline{Z} \Longleftrightarrow Z \in R$ என்றும் நிரூபிக்க.